

Auszug aus:

Fotografische Datenbasengenerierung
Für Simulatoren mit digitalem
Außensichtsystem

Dipl.-Ing. Aristovoulos Christidis

4 Bearbeitung dreidimensionaler Strukturen

Die Bearbeitung dreidimensionaler Strukturen umfaßt im hier erörterten Zusammenhang die Ermittlung der Koordinaten vektorisierter Objektdarstellungen zum Zwecke der Wiedergabe bzw. Nachbildung realitätsnaher Objektansichten; dazu gehört die Modellierung und Positionierung räumlicher Konstruktionen und die Erstellung perspektivischer Projektionen erzeugter Modelle ebenso wie die Rekonstruktion von Objekten aus ihren ebenen Darstellungen.

Die in den nächsten Abschnitten besprochene grafische Datenverarbeitung vermittelt einen kurzen Überblick über die wichtigsten Rechentechniken und Begriffe. Sie bildet die Grundlage für die anschließend hergeleiteten Rekonstruktionsmethoden, die eine Vermessung von Objekten aus ihren perspektivischen Projektionen erlauben. Schließlich wird ein im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickeltes Verfahren vorgestellt. Es ermöglicht die Ermittlung der Maße eines Objektes aus nur einer Aufnahme (Projektion) bei Vorhandensein von Information über seine Struktur und/oder Proportionen.

Nicht näher erläutert werden demgegenüber Verarbeitungs-, Darstellungs- und Speicherungsverfahren, (Verdeckungs-, Schattierungs-, Manipulationsalgorithmen u.ä.), die unverändert von der angegebenen Literatur (z.B.: W.K.Giloi 1978; N.Ahuja, B.J.Schachter 1983; P.Gorny, A.Viereck 1984; G.Engeln-Müllges 1986; G.Pomaska 1986; J.Platé 1987; L.Adams 1988; U.Beck 1988; M.E.Mortenson 1989) übernommen wurden.

4.1 Grafische Datenverarbeitung

Die im folgenden wiedergegebenen mathematischen Methoden zur Berechnung und Darstellung dreidimensionaler Objektkoordinaten werden in einer Vielzahl von im letzten Jahrzehnt erschienenen Werken behandelt (z.B.: D.H.Ballard, C.M.Brown 1982; J.D.Foley, A.v.Dam 1982; B.J.Schachter 1983; W.M.Newmann, R.F.Sproull 1984;

W.Purgathofer 1985; A.Rosenfeld 1986; K.I.Joy et al. 1988). Sie werden nachstehend noch einmal kurz erläutert, weil sie im Rahmen der vorliegenden Arbeit angepaßt und weiterentwickelt wurden; gleichzeitig soll damit die -in der Literatur nicht einheitliche- Notation festgelegt werden.

4.1.1 Zweidimensionale Punkttransformationen

Drei der gebräuchlichsten ebenen Grafik-Transformationen sind die Verschiebung parallel zu den Achsen des Koordinatensystems (Translation), die Variation des Abbildungsmaßstabs getrennt für jede Hauptrichtung (Skalierung) und die Drehung um einen beliebigen Punkt in der Ebene (Rotation). Eine Anwendung dieser Techniken auf zwei Punkte in der genannten Reihenfolge ist in Abb. 4.1.1 dargestellt.

Für die Transformationen des Punktes A: $(x_A; y_A)$ -und analog für jene des Punktes B- gilt nach Abb.4.1.1, dargestellt in Matrizenform:

$$[x_{ATSR} \ y_{ATSR}] = (([x_A \ y_A] + [x_t \ y_t]) \cdot \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} - [x_C \ y_C]) \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} + [x_C \ y_C] \quad (4.1)$$

Es läßt sich unschwer nachweisen, daß unter Verwendung homogener Koordinaten (vgl. J.Encarnação, W.Straßer 1988) die in Gl.(4.1) enthaltenen Transformationen geschrieben werden können als das Produkt (hier als Falksches Schema):

$$[x_A \ y_A \ 1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_t & y_t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_C & -y_C & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_C & y_C & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2a)$$

bzw.:

$$\begin{bmatrix} s_x \cdot \cos\theta & s_x \cdot \sin\theta & 0 \\ -s_y \cdot \sin\theta & s_y \cdot \cos\theta & 0 \\ (s_x \cdot x_t - x_c) \cdot \cos\theta & (s_x \cdot x_t - x_c) \cdot \sin\theta & 1 \\ -(s_y \cdot y_t - y_c) \cdot \sin\theta + x_c & +(s_y \cdot y_t - y_c) \cdot \cos\theta + y_c & 1 \end{bmatrix}$$

$$[x_A \ y_A \ 1] [\quad \quad x_{ATSR} \quad \quad y_{ATSR} \quad \quad 1] ,$$

(4.2b)

wobei schon an dieser Stelle festzustellen ist, daß die Daten der translatorischen Bewegung (x_t, y_t, x_c, y_c) lediglich in die letzte Zeile der resultierenden Transformationsmatrix eingehen (vgl. Abschnitt 4.2).

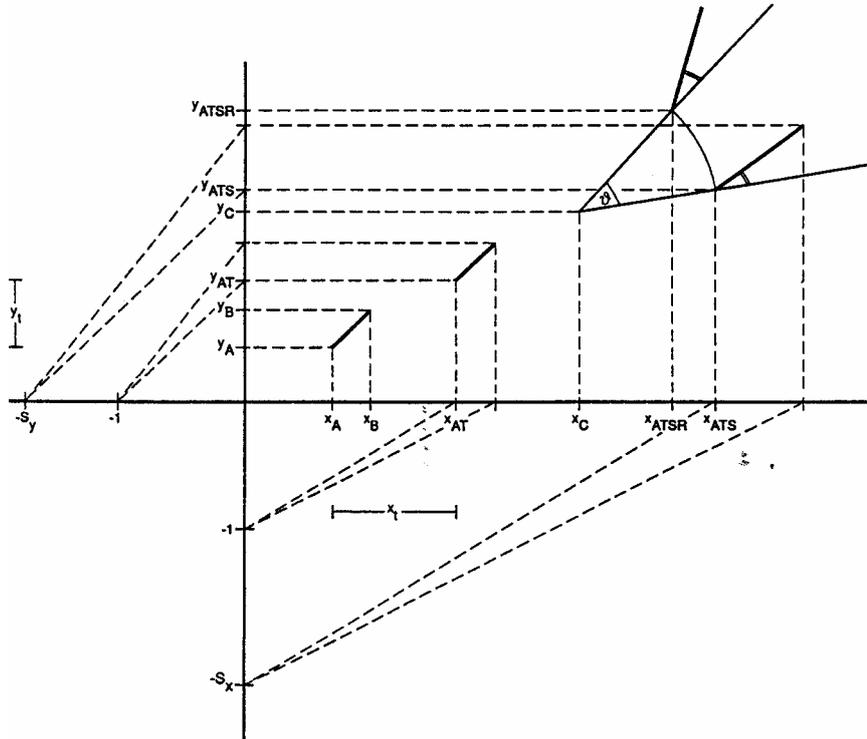


Abb.4.1.1 Translation, Skalierung und Rotation zweier Punkte

Zum Gebrauch homogener Koordinaten sei hier noch daran erinnert, daß sie die geschlossene Darstellung dreidimensionaler Transformationen in Form von Matrizenprodukten ermöglichen. Steht im Transformationsergebnis als letzte Punktkoordinate keine Eins, so ist durch diese Koordinate zu dividieren **-normieren-** (vgl. auch o.a. Literatur).

4.1.2 Dreidimensionale Punkttransformationen

Die Anwendung der im vorigen Abschnitt angestellten Überlegungen auf den dreidimensionalen euklidischen Raum führt unmittelbar, bei Verwendung homogener Koordinaten, im Falle der Verschiebung von Punkten parallel zu den Koordinatenachsen um jeweils x_t , y_t und z_t , zur Translationsmatrix

$$T_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_t & y_t & z_t & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

und bei einer Maßstabsveränderung um die Skalierungsfaktoren s_x , s_y und s_z zur Skalierungsmatrix

$$T_S = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Die Rotation um eine der Hauptachsen kann anhand des in Abb. 4.1.2 dargestellten Zusammenhangs berechnet werden. Darin gilt:

$$\begin{aligned} a_{A'} &= a_A \cdot \cos\theta - b_A \cdot \sin\theta \\ b_{A'} &= a_A \cdot \sin\theta + b_A \cdot \cos\theta \end{aligned} \quad (4.5)$$

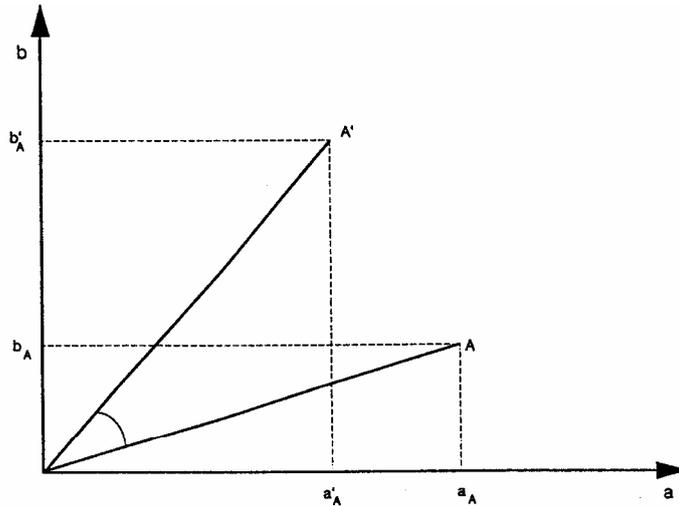


Abb.4.1.2 Zur Berechnung der Rotationsmatrizen

Wird die Achse a als stellvertretend für x , b entsprechend für y angesehen, so beschreibt Gl.(4.5) eine Drehung um die z -Achse. Die dazugehörige Systemmatrix

$$T_{Rz} = \begin{bmatrix} \cos\theta_z & \sin\theta_z & 0 & 0 \\ -\sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

stellt erwartungsgemäß die um eine Dimension erweiterte Rotationsmatrix nach Gl.(4.2a) dar. Analog dazu führen die Entsprechungen ($a \hat{=} z$; $b \hat{=} x$) zur Rotationsmatrix für Drehungen um die y -Achse:

$$T_{Ry} = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & -\sin\theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

und ($a \hat{=} y$; $b \hat{=} z$) zur Rotationsmatrix

$$T_{Rx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & \sin\theta_x & 0 \\ 0 & -\sin\theta_x & \cos\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

für Drehungen um die x-Achse.

Mit θ_x , θ_y und θ_z wurden hier die Drehwinkel um die jeweilige Koordinatenachse bezeichnet; sie werden gegen den Uhrzeigersinn gemessen, wenn als Blickrichtung jene vom positiven Teil der Koordinatenachse zum Koordinatenursprung angenommen wird.

Sowohl die einzelnen Rotationsmatrizen T_{Rx} , T_{Ry} , T_{Rz} als auch beliebige Produkte unter ihnen sind orthogonal, d.h. die Transponierte einer dieser Matrizen oder eines beliebigen Produktes daraus ist gleichzeitig deren Inverse. Diese Eigenschaft ist für die unten erörterte Rekonstruktionsmethode (Abschnitt 4.2.3) von Bedeutung.

Zur Drehung um eine Parallele zu einer der Koordinatenachsen wird erst eine Translation zum Ursprung und dann die Rotation um die entsprechende Koordinatenachse ausgeführt; anschließend wird die Translation rückgängig gemacht. Dies führt zur Gesamtmatrix:

$$T_{ges} = T_T \cdot T_{R1} \cdot T_{R2} \cdot \dots \cdot T_T^{-1},$$

wenn T_T die Translation der Rotationsachse bis zum Koordinatenursprung und das Produkt $T_{R1} \cdot T_{R2} \cdot \dots$ die Folge der darzustellenden Drehungen repräsentieren. Die Tatsache, daß das Matrizenprodukt nicht kommutativ ist, korrespondiert mit der Erkenntnis, daß die Reihenfolge räumlicher Drehungen nicht gleichgültig für das Ergebnis ist.

Rotationen um andere als die Hauptachsen werden als geeignete Folgen von Drehungen um Achsen parallel zu den Koordinatenachsen berechnet. Die dazu erforderlichen Umrechnungen werden hier nicht behandelt, weil sie für die folgenden Erörterungen ohne Relevanz sind. Aus demselben Grunde findet im Rahmen der hier vorgestellten Arbeit das in der Praxis häufig eingesetzte Linkssystem keine Anwendung.

4.1.3 Dreidimensionale Zentralprojektion

Zur Berechnung der Projektion eines Punktes $A:(x_A; y_A; z_A; 1)$ auf den Punkt $A':(x_{A'}; y_{A'}; z_{A'}; 1)$ in der von drei Punkten $C:(x_C; y_C; z_C; 1)$, $D:(x_D; y_D; z_D; 1)$, $E:(x_E; y_E; z_E; 1)$ aufgespannten Ebene ergeben sich bei dem Projektionszentrum $P:(x_P; y_P; z_P; 1)$, unter Zuhilfenahme des Punktes $A'':(x_{A''}; y_{A''}; z_{A''}; 1)$ als Projektion des gesuchten Punktes A' auf die durch C und D definierte Gerade mit dem Punkt E als Projektionszentrum, für die jeweils kollinearen Punkte $CA''D$, $EA'A''$, $PA'A$ (Abb.4.1.3) die Beziehungen:

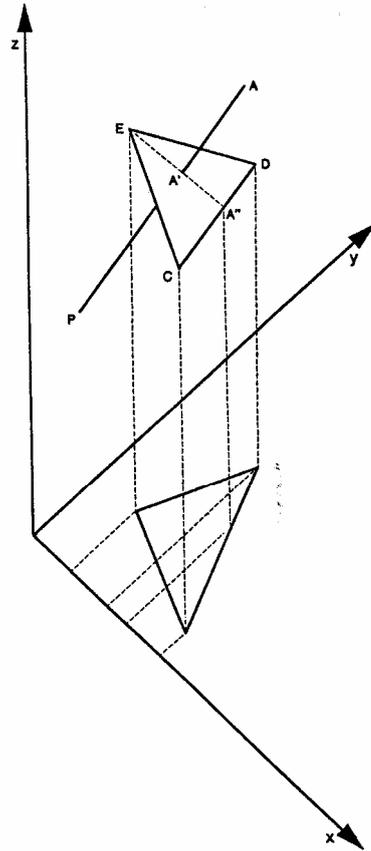


Abb.4.1.3 Projektion auf eine Ebene im dreidimensionalen Raum

$$\frac{x_{A''} - x_C}{x_C - x_D} = \frac{y_{A''} - y_C}{y_C - y_D} = \frac{z_{A''} - z_C}{z_C - z_D}, \quad (4.9), (4.10)$$

$$\frac{x_{A'} - x_E}{x_{A''} - x_E} = \frac{y_{A'} - y_E}{y_{A''} - y_E} = \frac{z_{A'} - z_E}{z_{A''} - z_E}, \quad (4.11), (4.12)$$

$$\frac{x_{A'} - x_P}{x_A - x_P} = \frac{y_{A'} - y_P}{y_A - y_P} = \frac{z_{A'} - z_P}{z_A - z_P}. \quad (4.13), (4.14)$$

Gemäß den Betrachtungen im vorangegangenen Abschnitt läßt sich daraus die Projektionsmatrix auf der folgenden Seite herleiten; sie ist in der hier ausgewerteten Literatur nicht enthalten - vermutlich aufgrund ihrer Komplexität. Eine Nichtbeachtung ihrer Herleitung führt jedoch zu weit verbreiteten Vereinfachungen, die eine mathematische Legitimation vermissen lassen (vgl. z.B. D.F.Rogers, J.A.Adams 1976, S.72: "(..) attain an esthetically pleasing perspective.").

Wird das Koordinatensystem so gewählt, daß die Projektionsebene (entsprechend der Netzhaut bzw. der Filmebene) mit der x-y-Ebene zusammenfällt und das Projektionszentrum (Betrachterstandpunkt) auf der positiven z-Achse liegt, so ist die Projektion durch die Matrix

$$T_{P1} = \begin{bmatrix} -c \cdot z_P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c \cdot z_P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & -c \cdot z_P \end{bmatrix} \quad (4.15a)$$

mit

$$c = x_C(y_D - y_E) + x_D(y_E - y_C) + x_E(y_C - y_D)$$

beschrieben, wie aus der umseitigen Projektionsmatrix für $z_C = z_D = z_E = 0$ und $x_P = y_P = 0$ folgt.

Die Berechnung der Projektion nach Gl.(4.15a) bedeutet keine Beschränkung der Allgemeingültigkeit der obigen Betrachtungen, sofern die Koordinaten der zu projizierenden Raum- bzw. Objektpunkte auf das so definierte Koordinatensystem transformiert werden und die betrachtete Abbildung durch genau eine Projektion darstellbar ist, d.h., wenn keine Spiegelungen, Schattenwürfe, seitliche Ansichten fotografischer Aufnahmen etc. vorliegen; davon wird im folgenden ausgegangen. Die zu projizierenden Objekte befinden sich dann im Halbraum, der von der x-y-Ebene und der negativen z-Achse definiert wird.

Aufgrund der Gleichwertigkeit in Bezug auf das normierte Ergebnis kann die Projektionsmatrix ebenso angegeben werden mit:

$$T_{P2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/z_P \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.15b)$$

Auslassung der mit Nullen besetzten dritten Spalte in Gl.(4.15b) führt zu der Projektionsmatrix:

$$T_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/z_P \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.15c)$$

Somit läßt sich die Projektion eines beliebigen Punktes $p^T = [x \ y \ z \ 1]$ auf die x-y-Ebene als das Faltsche Schema

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X' & Y' & H \end{bmatrix} \quad (4.16a)$$

oder als die Produkte

$$H \cdot p'^T = p^T \cdot T$$

bzw.

$$p'^T = 1/H \cdot p^T \cdot T \quad (4.16b)$$

darstellen, wobei T gleich dem Produkt der Matrizen aller der Projektion vorausgehenden Transformationen mit der Projektionsmatrix T_p ist:

$$T = T_1 \cdot T_2 \cdot \dots \cdot T_p .$$

Zur Erlangung einer geschlossenen Darstellung der Transformation und Projektion von n Punkten p_i , $i=1, \dots, n$ werden bei den weiteren Betrachtungen die Größen H_i -abweichend vom angegebenen Schrifttum- zu einer Diagonalmatrix H zusammengefaßt, so daß

$$H \cdot p'^T = p^T \cdot T \quad (4.17a)$$

bzw.

$$p'^T = H^{-1} \cdot p^T \cdot T \quad (4.17b)$$

gilt, mit

$$H = \begin{bmatrix} H_1 & & & 0 \\ & \vdots & & \\ & & \vdots & \\ 0 & & & H_n \end{bmatrix}, \quad H^{-1} = \begin{bmatrix} 1/H_1 & & & 0 \\ & \vdots & & \\ & & \vdots & \\ 0 & & & 1/H_n \end{bmatrix}, \quad (4.18a), (4.18b)$$

$$p^T = \begin{bmatrix} p_1^T \\ \vdots \\ p_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n & 1 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

und

$$P'^T = \begin{bmatrix} p_1'^T \\ \vdots \\ p_n'^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n' & y_n' & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Die hier vorgestellten Transformationen wurden als Optionen innerhalb eines im Rahmen der vorliegenden Arbeit erstellten Software-Systems zur grafischen Datenverarbeitung (E3D5 - s. Anhang) implementiert. Abb.4.1.4 enthält ein Beispiel aus dem Einsatz dieses Systems.

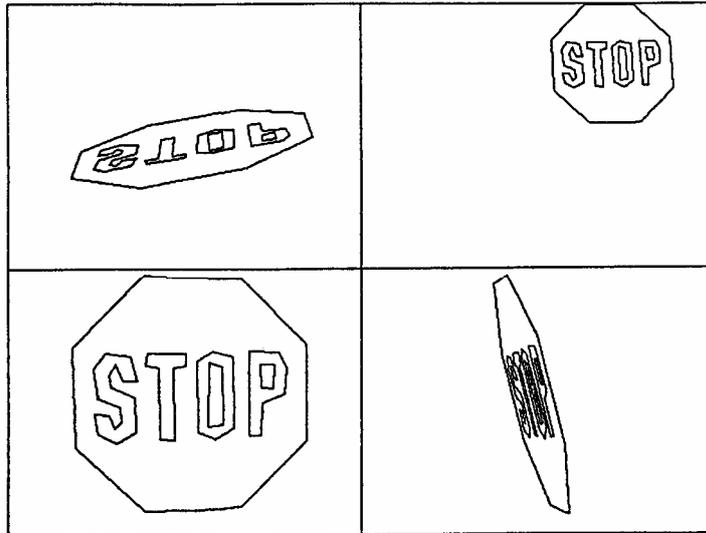


Abb.4.1.4 Anwendung der hergeleiteten Transformationen

4.2 Rekonstruktionsmethoden

Wird Gl.(4.16) aufgefaßt als die Quantifizierung des Zusammenhangs zwischen den räumlichen Koordinaten eines Punktes \underline{p} sowie den Daten über die vorgenommene Transformation und Projektion \underline{T} einerseits und den zweidimensionalen Projektionskoordinaten \underline{p}' andererseits:

$$\underline{p}' = f(\underline{p}, \underline{T}),$$

so gibt jede Auflösung dieser Gleichung, bei der Punktkoordinaten und/oder Projektionsdaten als Ausgangsgröße auf der linken Seite stehen, eine Rekonstruktion dreidimensionaler Größen wieder. Dazu gehören insbesondere die unten erörterten Berechnungsverfahren für \underline{p} und \underline{T} ebenso wie die danach behandelte Ermittlung wesentlicher Teile davon.

4.2.1 Dreidimensionale Punktreakonstruktion

Die sich am häufigsten stellende Rekonstruktionsaufgabe ist die Vermessung von Objekten bzw. die Bestimmung ihrer Lage im Raum durch die Ermittlung der Koordinaten einzelner Punkte \underline{p} aus deren Projektionen \underline{p}' und der Kenntnis über die Entstehung dieser Projektionen in Form der Transformationsmatrix \underline{T} (s. M.Zeller 1947; W.Rüger et al. 1978; G.Konecny, G.Lehmann 1980; K.Kraus 1982). Dies entspricht der Auflösung von Gl.(4.16) zu

$$\underline{p} = f_1(\underline{p}', \underline{T}^-),$$

wobei \underline{T}^- eine noch zu bestimmende Inversionsmöglichkeit für die Transformationsmatrix \underline{T} und $f_1(\underline{p}', \underline{T}^-)$ den gesuchten mathematischen Zusammenhang symbolisieren. Da die resultierende Transformationsmatrix nach Gl.(4.15) nicht invertierbar ist (was in der Anschauung der Unmöglichkeit der räumlichen Lagebestimmung für einen Punkt aus dessen zweidimensionaler Projektion ent-

spricht), wird dieser Mangel durch die Hinzuziehung mehrerer Projektionen desselben Punktes behoben; bei Berücksichtigung zweier Projektionen T_1 und T_2 führt dies zu

$$\begin{bmatrix} T_{111} & T_{112} & T_{114} & T_{211} & T_{212} & T_{214} \\ T_{121} & T_{122} & T_{124} & T_{221} & T_{222} & T_{224} \\ T_{131} & T_{132} & T_{134} & T_{231} & T_{232} & T_{234} \\ T_{141} & T_{142} & T_{144} & T_{241} & T_{242} & T_{244} \end{bmatrix}$$

$$[x \ y \ z \ 1] \ [\ X_1' \quad Y_1' \quad H_1 \quad X_2' \quad Y_2' \quad H_2 \] \quad (4.21a)$$

bzw.

$$\underline{p}^T \cdot [T_1, T_2] = [H_1 \cdot \underline{p}_1'^T, H_2 \cdot \underline{p}_2'^T] \quad (4.21b)$$

Das Problem nach Gl.(4.21) ist überbestimmt. Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate (vgl. Kap.2) ergibt zunächst:

$$\underline{p}^T \cdot [T_1, T_2] \cdot \begin{bmatrix} T_1^T \\ T_2^T \end{bmatrix} = [H_1 \cdot \underline{p}_1'^T, H_2 \cdot \underline{p}_2'^T] \cdot \begin{bmatrix} T_1^T \\ T_2^T \end{bmatrix}$$

und daraus:

$$\underline{p}^T = [H_1 \cdot \underline{p}_1'^T, H_2 \cdot \underline{p}_2'^T] \cdot \begin{bmatrix} T_1^T \\ T_2^T \end{bmatrix} \cdot \left([T_1, T_2] \cdot \begin{bmatrix} T_1^T \\ T_2^T \end{bmatrix} \right)^{-1} \quad (4.22)$$

Gl.(4.22) ist in dieser Form (ohne Kenntnis von H_1 und H_2) nicht lösbar. Eine iterative Lösung kann erreicht werden, indem zunächst $H_1^{(0)} = H_2^{(0)} = 1$ angenommen wird. Das Ergebnis der ersten Iteration $\underline{p}^{T(1)}$ lautet dann:

$$\begin{aligned} \underline{p}^{T(1)} \cdot T &= [\underline{p}_1'^T, \underline{p}_2'^T] \cdot \begin{bmatrix} T_1^T \\ T_2^T \end{bmatrix} \cdot \left([T_1, T_2] \cdot \begin{bmatrix} T_1^T \\ T_2^T \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot [T_1, T_2] \\ &= [\underline{p}_1'^{T(1)}, \underline{p}_2'^{T(1)}] \end{aligned}$$

Aus dem Vektor $[p_1'^{T(1)}, p_2'^{T(1)}]$ kann wiederum unter Verwendung der Gaußschen Methode eine erste Näherung für H_1 und H_2 errechnet werden; aus der Forderung:

$$p_1'^T - (1/H_1^{(1)}) \cdot p_1'^{T(1)} \stackrel{!}{=} \min$$

bzw.

$$p_2'^T - (1/H_2^{(1)}) \cdot p_2'^{T(1)} \stackrel{!}{=} \min$$

folgt nämlich:

$$p_1'^T \cdot p_1' = (1/H_1^{(1)}) \cdot p_1'^{T(1)} \cdot p_1'$$

bzw.

$$p_2'^T \cdot p_2' = (1/H_2^{(1)}) \cdot p_2'^{T(1)} \cdot p_2'$$

und schließlich, in Anwendung des im Abschnitt 2.2.4 wiedergegebenen Verfahrens,

$$H_1^{(1)} = \frac{p_1'^{T(1)} \cdot p_1'}{p_1'^T \cdot p_1'} \quad (4.23a)$$

und

$$H_2^{(1)} = \frac{p_2'^{T(1)} \cdot p_2'}{p_2'^T \cdot p_2'} \quad (4.23b)$$

wobei die Iterationsergebnisse $p_1'^{T(1)}$ $p_2'^{T(1)}$ als die fehlerbehafteten Größen angesehen wurden. Mit den so ermittelten Werten für $H_1^{(1)}$ und $H_2^{(1)}$ wird nach Gl.(4.22) die zweite Iteration errechnet u.s.f.. Die Iterationen konvergieren i.a., denn die Matrix

$$[T_1, T_2]^T \cdot ([T_1, T_2] \cdot [T_1, T_2]^T)^{-1}$$

ist die Pseudoinverse zu $[T_1, T_2]$ (vgl. W.K.Pratt, 1978; C.R.Rao, S.K.Mitra, 1971); somit ist zu erwarten, daß ihr Produkt nahe der Einheitsmatrix liegt und

$$p^{T(1)} \cdot T \approx [p_1'^T, p_2'^T]$$

gilt.

Der obige, im Rahmen dieser Arbeit formulierte und getestete iterative Rechenweg bietet den Vorteil, daß er, in Zusammenhang mit dem (ebenfalls hier entworfenen) Ausdruck Gl.(4.17) eine geschlossene und damit anschaulichere Darstellung für das Rekonstruktionsproblem liefert.

In der Praxis (vgl. D.F.Rogers, J.A.Adams, 1976) wird eine schnellere, direkte Lösung beschritten, indem die Matrizen-gleichung (4.21) ausgeschrieben und die Skalargleichungen für H1 bzw. H2 in jene für x1' und y1' bzw. x2' und y2' eingesetzt werden:

$$(T1_{11}-T1_{14}x1')x+(T1_{21}-T1_{24}x1')y+(T1_{31}-T1_{34}x1')z+(T1_{41}-T1_{44}x1')=0$$

$$(T1_{12}-T1_{14}y1')x+(T1_{22}-T1_{24}y1')y+(T1_{32}-T1_{34}y1')z+(T1_{42}-T1_{44}y1')=0$$

$$(T2_{11}-T2_{14}x2')x+(T2_{21}-T2_{24}x2')y+(T2_{31}-T2_{34}x2')z+(T2_{41}-T2_{44}x2')=0$$

$$(T2_{12}-T2_{14}y2')x+(T2_{22}-T2_{24}y2')y+(T2_{32}-T2_{34}y2')z+(T2_{42}-T2_{44}y2')=0$$

Da die Verwendung homogener Koordinaten ein homogenes Gleichungs-system ergäbe, wird der obige Zusammenhang als

$$A \cdot x = b$$

formuliert und mit der Gaußschen Methode zu

$$x = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot b \quad (4.24)'$$

gelöst, mit

$$A = \begin{bmatrix} T1_{11}-T1_{14}x1' & T1_{21}-T1_{24}x1' & T1_{31}-T1_{34}x1' \\ T1_{12}-T1_{14}y1' & T1_{22}-T1_{24}y1' & T1_{32}-T1_{34}y1' \\ T2_{11}-T2_{14}x2' & T2_{21}-T2_{24}x2' & T2_{31}-T2_{34}x2' \\ T2_{12}-T2_{14}y2' & T2_{22}-T2_{24}y2' & T2_{32}-T2_{34}y2' \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

$$\underline{x}^T = [x \ y \ z] \quad (4.26)$$

und

$$\underline{p}^T = \begin{bmatrix} T1_{44}x1' - T1_{41} \\ T1_{44}y1' - T1_{42} \\ T2_{44}x2' - T2_{41} \\ T2_{44}y2' - T2_{42} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

4.2.2 Ermittlung der Transformationsmatrix

Die verbleibende Möglichkeit, daß nämlich anhand gegebener Punkte \underline{P} im Raum einerseits und ihrer Projektionskoordinaten \underline{P}' andererseits die Transformationsmatrix \underline{T} durch (s.o.)

$$\underline{T} = f_2(\underline{P}', \underline{P}^-)$$

ermittelt werden soll, ergibt mit den in den Gln.(4.18) bis (4.20) eingeführten Matrizen und den oben angeführten Überlegungen, nach Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf das i.a. überbestimmte System:

$$\underline{T} = (\underline{P} \cdot \underline{P}^T)^{-1} \cdot \underline{P} \cdot \underline{H} \cdot \underline{P}'^T \quad (4.28)$$

Auch hier kann die Lösung zunächst iterativ ermittelt werden, wenn $\underline{H}^{(0)} = \underline{I}$ angenommen wird (mit \underline{I} sei die Einheitsmatrix bezeichnet). Das Ergebnis $\underline{T}^{(i)}$ jeder Iteration liefert mit Gl.(4.23) die Elemente einer neuen Diagonalmatrix nach Gl.(4.18) mit:

$$H_{kk}^{(i)} = \frac{p_k'^T \cdot p_k'}{p_k'^T \cdot p_k'} \quad (4.29)$$

wenn p_k bzw. p_k' die Koordinaten der betrachteten Punkte im Raum bzw. derer Projektionen und $p_k'^{(i)}$ die Größe

$$p_k^{T(i)} = p_k^T \cdot T^{(i)}$$

kennzeichnen.

Die in der Praxis verwendete direkte Lösung geht wieder von der für eine Projektion ausgeschriebenen Gl.(4.21) aus; jeder Punkt, der mit seinen Raum- bzw. Projektionskoordinaten vorliegt, liefert hiernach die Beiträge:

$$x \cdot T_{11} - x x' \cdot T_{14} + y \cdot T_{21} - y x' \cdot T_{24} + z \cdot T_{31} - z x' \cdot T_{34} + T_{41} - x' \cdot T_{44} = 0$$

$$x \cdot T_{12} - x y' \cdot T_{14} + y \cdot T_{22} - y y' \cdot T_{24} + z \cdot T_{32} - z y' \cdot T_{34} + T_{42} - y' \cdot T_{44} = 0$$

Da es sich hier in jedem Falle um ein homogenes Gleichungssystem handelt, wird es mit der Festsetzung des Wertes eines der gesuchten T -Elemente in ein inhomogenes solches übergeführt. Hierbei bietet sich die Wahl $T_{44} = 1$ an, zumal T_{44} immer positiv bleibt; denn es ist immer:

$$T_{44} = 1 - z_t / z_p > 0,$$

wenn z_t die (nichtpositive) Translation in z -Richtung und z_p die (positive) z -Koordinate des Betrachterstandpunktes sind (vgl. Abschnitt 4.1.3). Bei Verwendung von n Punkten ergibt sich daraus die Matrixgleichung:

$$L \cdot \underline{t} = \underline{m}$$

und die Lösung im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate

$$\underline{t} = (L^T \cdot L)^{-1} \cdot L^T \cdot \underline{m} \quad (4.30)$$

für die zum Vektor \underline{t} zusammengefaßten 11 von 12 Elementen der Matrix T aus Gl.(4.16a):

$$\underline{t}^T = [T_{11} \ T_{12} \ T_{14} \ T_{21} \ T_{22} \ T_{24} \ T_{31} \ T_{32} \ T_{34} \ T_{41} \ T_{42}]$$

$$L = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & -x_1 x_1' & y_1 & 0 & -y_1 x_1' & z_1 & 0 & -z_1 x_1' & 1 & 0 \\ 0 & x_1 & -x_1 y_1' & 0 & y_1 & -y_1 y_1' & 0 & z_1 & -z_1 y_1' & 0 & 1 \\ : & : & : & : & : & : & : & : & : & : & : \\ x_n & 0 & -x_n x_n' & y_n & 0 & -y_n x_n' & z_n & 0 & -z_n x_n' & 1 & 0 \\ 0 & x_n & -x_n y_n' & 0 & y_n & -y_n y_n' & 0 & z_n & -z_n y_n' & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(4.31)

und

$$M^T = [x_1' \ y_1' \ \dots \ x_n' \ y_n']$$

(4.32)

Die Formulierung der Rekonstruktionsaufgabe nach Gl.(4.30) macht deutlich, daß zur eindeutigen Bestimmung von T die genaue Kenntnis von mindestens $5\frac{1}{2}$ Punkten erforderlich ist (d.h., von dem 6. Punkt wird lediglich die Kenntnis einer der beiden Projektionskoordinaten - x' oder y' - benötigt), was in der Formulierung nach Gl.(4.28) nicht zum Vorschein kommt. Tatsächlich führen beide Matrizen erst bei Vorlage von mindestens $5\frac{1}{2}$ Punkten zum selben Ergebnis; vorher ist Gl.(4.30) nicht lösbar, während Gl.(4.28) evtl. falsche Ergebnisse liefert, d.h., Lösungen für T , die zwar Gl.(4.28) für $H = I$ erfüllen aber nicht notwendigerweise die für die Projektion verwendete Transformationsmatrix wiedergeben.

Die oben erörterten Rekonstruktionsmethoden können i.a. zur Unfallrekonstruktion nicht oder nur bedingt eingesetzt werden, weil in solchen Fällen zumeist Einzelaufnahmen (entsprechend P') existieren, zu denen weder die räumlichen Daten der abgebildeten Objekte (P) noch Informationen über Standort, Orientierung und Brennweite der verwendeten Kamera (T) vorliegen. Die Tatsache jedoch, daß für den betrachtenden Menschen auch Einzelaufnahmen durchaus Aufschluß über die darin abgebildeten Objekte geben können, gab den Anstoß zu den nachstehend aufgeführten Betrachtungen.

4.2.3 Objektrekonstruktion aus einer Aufnahme

Soll ein dreidimensionales Objekt anhand genau einer Aufnahme rekonstruiert werden, so ist eine Auflösung von Gl.(4.17b):

$$\mathbf{P}'^T = \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{T} \quad (4.17b)$$

nach \mathbf{P}^T ohne Kenntnis von \mathbf{T} zunächst unmöglich. Wird jedoch die Kenntnis über die Gestalt des abgebildeten Objekts in die Rechnung einbezogen, so modifiziert sich die Rekonstruktionsaufgabe insofern, als ein Teil der auf der rechten Seite der Gl.(4.17b) stehenden Größen als bekannt angesehen werden kann.

Vorinformation über die Gestalt eines zu rekonstruierenden Objektes kann in die Rechnung eingebracht werden, indem z.B. das Wissen über das Vorhandensein eines Quaders mit den unbekanntenen Längenverhältnissen $1 : m : n$ in der Form:

$$\mathbf{P}^T = \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{U} \quad (4.33a)$$

bzw., schematisch:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -n & 1 \\ 0 & m & 0 & 1 \\ 0 & m & -n & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -n & 1 \\ 1 & m & 0 & 1 \\ 1 & m & -n & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{P}^T \quad (4.33b)$$

einbezogen wird. Hierbei wurde stillschweigend angenommen, daß der zu rekonstruierende Quader am Koordinatenursprung stand, bevor er an den Ort der Aufnahme gebracht und projiziert wurde;

dies legt entsprechend die Wahl des Koordinatensystems und damit die noch unbekanntere Transformationsmatrix T fest, ohne jedoch die Allgemeingültigkeit der Gesamtbetrachtung und die Richtigkeit des Rekonstruktionsergebnisses zu beschränken.

Es läßt sich sofort erkennen, daß Gl.(4.33) eine Separation der Punktematrix P^T in eine bekannte Teilmatrix K^T und in eine unbekanntere Teilmatrix U vornimmt und somit die vorhandene Information über die (hier: rechten) Winkel zwischen den Objektkanten nutzt, was in Gl.(4.33b) gewissermaßen eine Rückführung des Quaders auf den Einheitswürfel als dessen einfachstes Primitivum bewirkt.

Sind mindestens $5\frac{1}{2}$ Punkte als einem Objekt mit bekannter Gestalt zugehörig erkannt und Punkten eines solchen dreidimensionalen Primitivums zugeordnet worden, so verändert sich Gl.(4.17b) zu:

$$\begin{aligned} P'^T &= H^{-1} \cdot K^T \cdot U \cdot T \\ &= H^{-1} \cdot K^T \cdot Q \end{aligned} \quad (4.34)$$

Die Matrix $Q = U \cdot T$ enthält nun alle Unbekannten in der Form -vgl. Gl.(4.16a)-

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \\ Q_{41} & Q_{42} & Q_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \cdot T_{11} & l \cdot T_{12} & l \cdot T_{14} \\ m \cdot T_{21} & m \cdot T_{22} & m \cdot T_{24} \\ n \cdot T_{31} & n \cdot T_{32} & n \cdot T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{44} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

und kann nach derselben Methode wie T (Abschnitt 4.2.2) berechnet werden.

Die gesuchten Größen l , m und n können zunächst aus der Matrix Q nicht extrahiert werden. Anders verhält es sich, wenn angenommen wird, daß in der ursprünglichen Transformationsmatrix T keine separaten Skalierungsfaktoren s_x , s_y , s_z enthalten seien, was

zwar die Allgemeingültigkeit der folgenden Erwägungen einschränkt, bezogen auf fotografische Aufnahmen jedoch lediglich die Abwesenheit bzw. Vernachlässigbarkeit geometrischer Verzerrungen impliziert, wovon ohnehin ausgegangen wird.

Bei einer genaueren Betrachtung der Struktur der nunmehr in Frage kommenden Transformationsmatrizen kann folgendes konstatiert werden:

Da das Produkt aller Transformationsmatrizen vor der Projektion die Form (vgl. Abschnitt 4.1.3):

$$T_{\text{ges}} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & 0 \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & 0 \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

und die Projektionsmatrix für $k = -1/z_p$ die Form von Gl.(4.15c):

$$T_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

haben, gilt immer mit Gl.(4.35):

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \\ Q_{41} & Q_{42} & Q_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \cdot t_{11} & l \cdot t_{12} & l \cdot k \cdot t_{13} \\ m \cdot t_{21} & m \cdot t_{22} & m \cdot k \cdot t_{23} \\ n \cdot t_{31} & n \cdot t_{32} & n \cdot k \cdot t_{33} \\ t_{41} & t_{42} & 1 + k \cdot t_{43} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Wie bereits festgestellt wurde, ist die gesamte Information über die translatorische Transformation in der letzten Zeile von Gl.(4.37) enthalten. Damit ist für $l = m = n = 1$ die von den

ersten drei Zeilen gebildete Untermatrix von Q eine orthogonale Matrix, weil sie nur aus Produkten von Rotationsmatrizen bestehen kann, die ebenfalls orthogonal sind (vgl. Abschnitt 4.1.2), und es gilt allgemein:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{Q_{11}}{1} & \frac{Q_{12}}{1} & \frac{Q_{13}}{1 \cdot k} \\ \frac{Q_{21}}{m} & \frac{Q_{22}}{m} & \frac{Q_{23}}{m \cdot k} \\ \frac{Q_{31}}{n} & \frac{Q_{32}}{n} & \frac{Q_{33}}{n \cdot k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{Q_{11}}{1} & \frac{Q_{21}}{m} & \frac{Q_{31}}{n} \\ \frac{Q_{12}}{1} & \frac{Q_{22}}{m} & \frac{Q_{32}}{n} \\ \frac{Q_{13}}{1 \cdot k} & \frac{Q_{23}}{m \cdot k} & \frac{Q_{33}}{n \cdot k} \end{bmatrix} \quad (4.38)
 \end{aligned}$$

Hierbei wurde stillschweigend ein evtl. zu berücksichtigender, einheitlicher Skalierungsfaktor den Faktoren 1, m, n zugeschlagen, was jedoch die Gültigkeit der folgenden Betrachtungen nicht beschränkt.

Aus der oben erläuterten Orthogonalitätsbedingung und aus Gl.(4.37) folgen unmittelbar 6 Beziehungen für die 9 Elemente der betrachteten Untermatrix (die verbleibenden 3 Freiheitsgrade sind die Rotationswinkel um die Hauptachsen):

$$\frac{Q_{11}^2}{1^2} + \frac{Q_{12}^2}{1^2} + \frac{Q_{13}^2}{1^2 k^2} = 1 \quad \text{bzw.} \quad 1^2 = Q_{11}^2 + Q_{12}^2 + \frac{Q_{13}^2}{k^2} \quad (4.39)$$

$$\frac{Q_{21}^2}{m^2} + \frac{Q_{22}^2}{m^2} + \frac{Q_{23}^2}{m^2 k^2} = 1 \quad \text{bzw.} \quad m^2 = Q_{21}^2 + Q_{22}^2 + \frac{Q_{23}^2}{k^2} \quad (4.40)$$

$$\frac{Q_{31}^2}{n^2} + \frac{Q_{32}^2}{n^2} + \frac{Q_{33}^2}{n^2 k^2} = 1 \quad \text{bzw.} \quad n^2 = Q_{31}^2 + Q_{32}^2 + \frac{Q_{33}^2}{k^2} \quad (4.41)$$

$$\frac{Q_{11} \cdot Q_{21}}{1 \cdot m} + \frac{Q_{12} \cdot Q_{22}}{1 \cdot m} + \frac{Q_{13} \cdot Q_{23}}{1 \cdot m \cdot k^2} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{k^2} = \frac{Q_{11} \cdot Q_{21} + Q_{12} \cdot Q_{22}}{-Q_{13} \cdot Q_{23}} \quad (4.42)$$

$$\frac{Q_{11} \cdot Q_{31}}{1 \cdot n} + \frac{Q_{12} \cdot Q_{32}}{1 \cdot n} + \frac{Q_{13} \cdot Q_{33}}{1 \cdot n \cdot k^2} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{k^2} = \frac{Q_{11} \cdot Q_{31} + Q_{12} \cdot Q_{32}}{-Q_{13} \cdot Q_{33}} \quad (4.43)$$

$$\frac{Q_{21} \cdot Q_{31}}{m \cdot n} + \frac{Q_{22} \cdot Q_{32}}{m \cdot n} + \frac{Q_{23} \cdot Q_{33}}{m \cdot n \cdot k^2} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{k^2} = \frac{Q_{21} \cdot Q_{31} + Q_{22} \cdot Q_{32}}{-Q_{23} \cdot Q_{33}} \quad (4.44)$$

Die Gleichungen (4.39) bis (4.44) lassen sich zusammenfassen zu:

$$\underline{Y} \cdot \underline{u} = \underline{g}, \quad (4.45a)$$

schematisch:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} 1^2 \\ m^2 \\ n^2 \\ 1/k^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -Q_{13}^2 \\ 0 & 1 & 0 & -Q_{23}^2 \\ 0 & 0 & 1 & -Q_{33}^2 \\ 0 & 0 & 0 & -Q_{13} \cdot Q_{23} \\ 0 & 0 & 0 & -Q_{13} \cdot Q_{33} \\ 0 & 0 & 0 & -Q_{23} \cdot Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11}^2 + Q_{12}^2 \\ Q_{21}^2 + Q_{22}^2 \\ Q_{31}^2 + Q_{32}^2 \\ Q_{11} \cdot Q_{21} + Q_{12} \cdot Q_{22} \\ Q_{11} \cdot Q_{31} + Q_{12} \cdot Q_{32} \\ Q_{21} \cdot Q_{31} + Q_{22} \cdot Q_{32} \end{bmatrix} = \underline{g} \quad (4.45b)$$

Die Lösung im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate:

$$\underline{u} = (\underline{Y}^T \cdot \underline{Y})^{-1} \cdot \underline{Y}^T \cdot \underline{g} \quad (4.46)$$

liefert die quadrierten Werte für l , m , n und $z_p = -1/k$, wenn mindestens zwei der Q_{13} , Q_{23} , Q_{33} ungleich Null sind.

Sollen mehr als eine Längen in derselben Hauptrichtung (etwa l_1 , l_2 - vgl. D.Sondermann 1990) berücksichtigt werden, so kann dies bei Vorhandensein hinreichend vieler Punkte geschehen, entweder, indem die Rechnung mehrmals durchgeführt wird, oder, indem die Matrizen \underline{U} und \underline{Q} in Gl.(4.34) eine zusätzliche Zeile, \underline{K}^T eine zusätzliche Spalte erhalten :

$$\underline{U}' = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 \\ l_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0^2 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}'^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ & & : & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & m & -n & 1 \\ l_2 & m & -n & 1 \\ & : & & \end{bmatrix} = \underline{P}^T \quad (4.47)$$

Die Ermittlung von l_1 und l_2 erfolgt dann durch Division der entsprechenden Zeilen von \underline{Q} durcheinander und Mittelung.

Die bisher erörterten Rekonstruktionsverfahren sind (in ihrer iterativen sowie in der direkten Form) in ein hierzu erstelltes Programmsystem (REKO - s. Anhang) integriert worden. Die Anwendung des oben dargestellten Separationsverfahrens auf die bereits gezeigten Objekte ermöglichte den Aufbau der Grafik in Abb.4.2.1 aus einem der in Abb.2.1.3 vorgestellten Fotos. Anwendung der in der Computer-Grafik gebräuchlichen Flächendefinitions- und -verdeckungsalgorithmen (s. W.Seckelmann 1989) führte schließlich zu dem in Abb.4.2.2 wiedergegebenen Grafik-Modell. Beide Modelle sind gegenüber den in Kap.2 vorgestellten, zweidimensionalen Vorlagen leicht korrigiert worden.

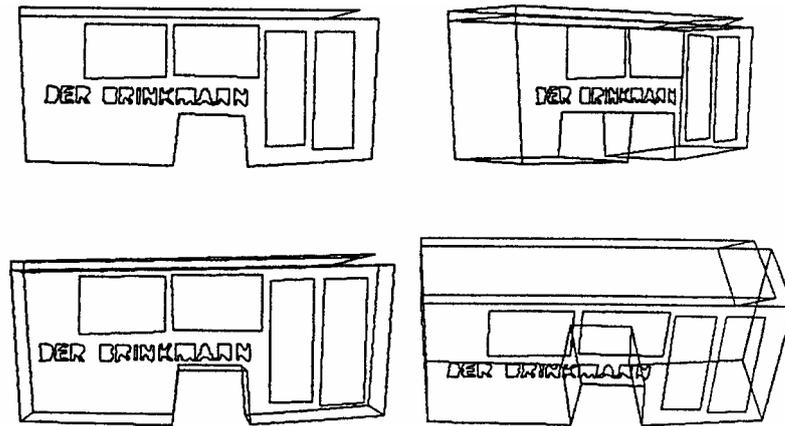


Abb.4.2.1 Erstelltes Grafik-Modell

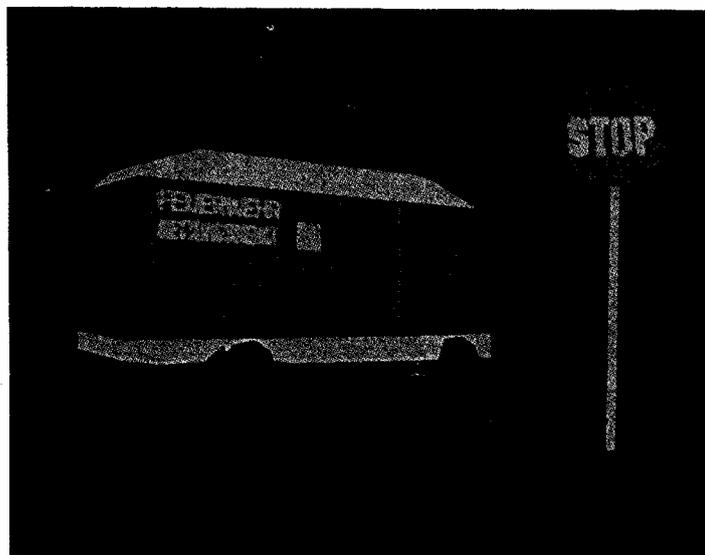


Abb.4.2.2 Aus einer Aufnahme rekonstruiertes Objekt