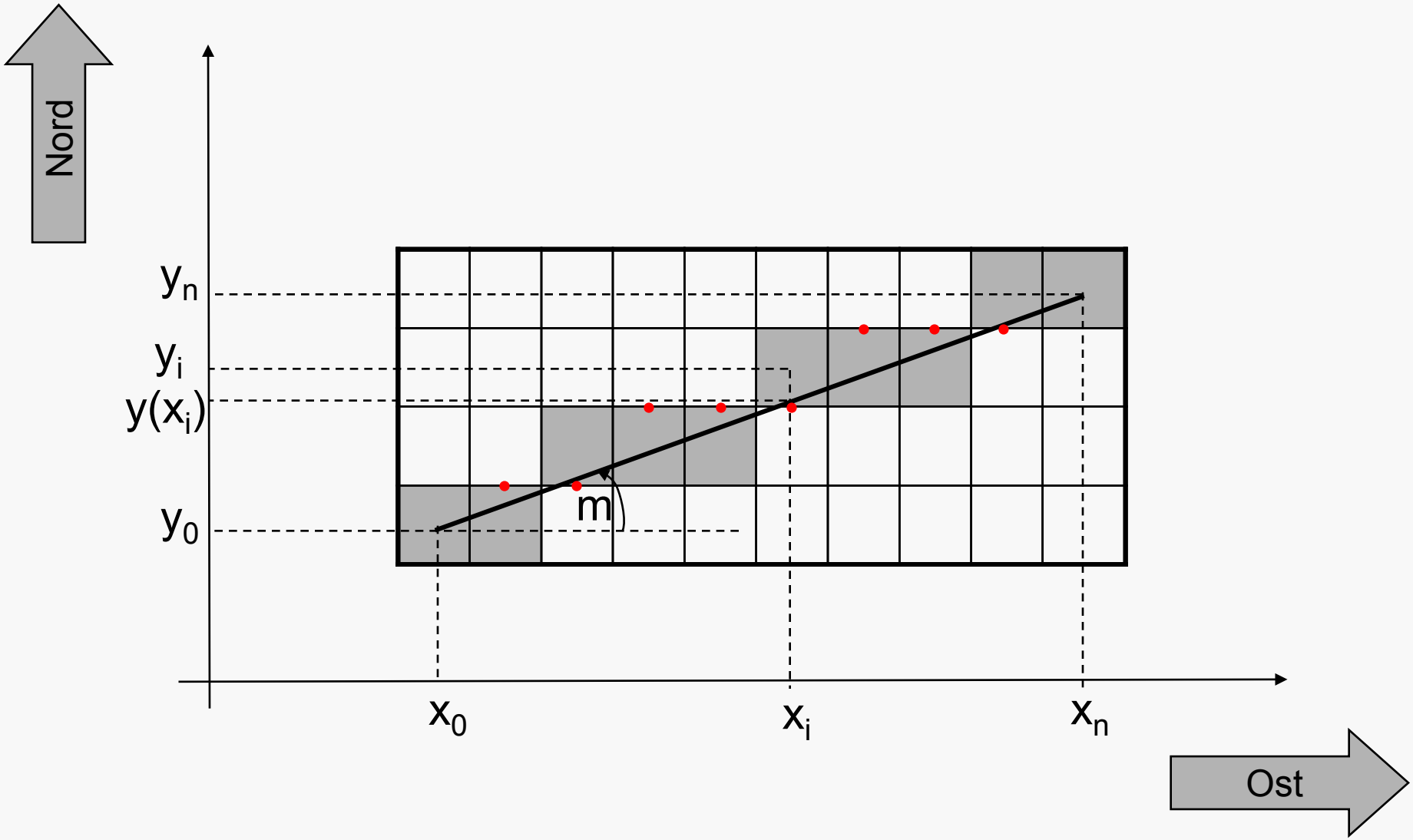
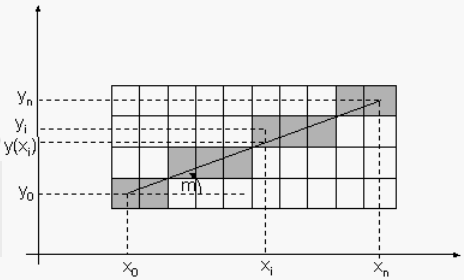
Gerasterte Linien



Gerasterte Linien

(n+1) Punkte einer gerasterten Geraden zw. (x_0,y_0) u. (x_n,y_n) – hier verwendete Notation:



x_i: Abszisse des i-ten Rasterpunktes ($x_i \in \mathbf{N}_0$)

$x_{i+1} = x_i + 1 \Rightarrow x_{i+j} = x_i + j$

$y(x_i)$: zu x_i, gehörige, mathem. exakte Ordinate ($y(x_i) \in \mathbf{R}$)

y_i: zu x_i gewählte („optimale“) Raster-Ordinate ($y_i \in \mathbf{N}_0$)

Annahme: $y(x_0) = y_0$; $y(x_n) = y_n$

$\Delta x = x_n - x_0$; $\Delta y = y(x_n) - y(x_0) = y_n - y_0$

Geradensteigung: $m = \Delta y / \Delta x = [\, y(x_i) - y_0 \,] / [\, x_i - x_0 \,]$ i=1,..,n

Berechnung der Ordinaten ($\in \mathbf{R}$) aus Pixelgrößen ($\in \mathbf{N}_0$):

$$y(x_i) = m \cdot (x_i - x_0) + y_0$$

Folgepixel: $y(x_{i+1}) = y(x_i+1) = m \cdot (x_i + 1 - x_0) + y_0$

Gerasterte Linien

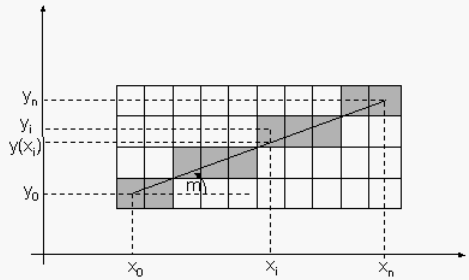
$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = m\,(x_i + 1 - x_0 - (x_i - x_0)) + y_0 - y_0$$

$$= m$$

⇨ $$y(x_{i+1}) = y(x_i) + m$$

$$= y_0 + (i+1) \cdot m \qquad \text{(DDA)}$$

Digital Differential Analyzer




```
void BruteForceLine (int x0,int y0,int xn,int yn)

{ int   x=x0;
  float y=(float)y0, m=(float)(yn-y0)/(xn-x0);

  for (x=x0; x<=xn; x++,y+=m)
     setPixel (x, (int)y);

  return;
}
```

t nsec / floatOp * *f* floatOps / Umrißpixel * *p* Umrißpixel / Dreieck * *d* Dreiecke / Szene

ergeben, falls: *t*=10; *f*=1; *p*=100; *d*=100.000

eine (unnötige) Wartezeit von 0,1 sec / Szene **!**

Wunsch: Von Pixel-Koordinaten (gerundet, $\in \mathbf{N}_0$) mit Ganzzahl-Arithmetik auf Folgepixel schließen

Gerasterte Linien

Jack Elton Bresenham: “Algorithm for Computer Control of a Digital Plotter” (IBM Systems Journal, 1965)

$0 \le x_0 < x_n$
$0 \le y_0 < y_n$
$\Delta y \le \Delta x$

Herleitung für 1. Oktanten (o.B.d.A.): $m \le 1$

Wachstum gerasterter Linie nach Osten oder Nordosten durch Hinzunahme jeweils eines weiteren Pixels.

Richtungsentscheidung (O/NO) anhand der mathematisch exakten Ordinaten $y(x_i)$ an der halben Pixel-Breite (Midpoint Algorithm nach M.L.V. Pitteway, 1967)

Erstes ermitteltes Pixel (x_1,y_1) :

(DDA) ⇨ $y(x_1) = y(x_0+1) = y(x_0) + \Delta y / \Delta x = y_0 + m$

weiter nach Osten ($y_1 = y_0$), wenn $y(x_0) + \Delta y / \Delta x < y_0 + ½$,

d.h., wenn $\Delta y / \Delta x < ½$ oder $2\Delta y – \Delta x < 0$;

– sonst weiter nach Nordosten ($y_1 = y_0+1$)

Gerasterte Linien

Hinzunahme von Folgepixel (i+1), i=1,...,n-1:

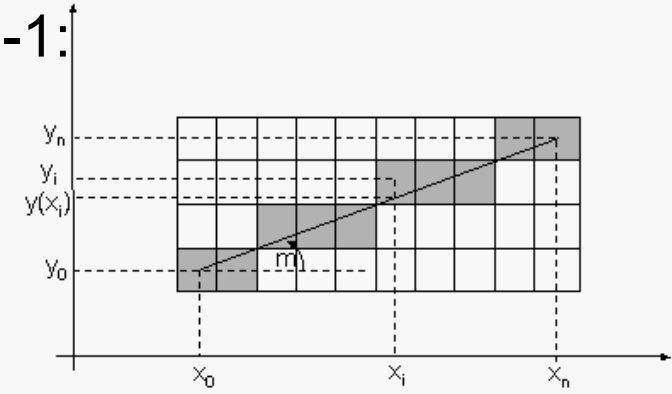
(DDA) ⇨ $y(x_{i+1}) = y(x_0+i+1)$

$= y_0 + (i+1) \cdot \Delta y / \Delta x$

Weiter nach Osten ($y_{i+1} = y_i$),

wenn: $y_0 + (i+1) \cdot \Delta y / \Delta x < y_i + ½$

– sonst weiter nach Nordosten ($y_{i+1} = y_i+1$)



[y_i ist (ganzzahlig) nicht berechenbar!]

Ost, wenn: $(i+1) \cdot \Delta y / \Delta x < y_i - y_0 + ½$

N := Anzahl bisheriger Nordost-Entscheidungen

$= y_i - y_0$

E := Anzahl bisheriger Ost-Entscheidungen

[N, E: nicht berechenbar – aber zählbar !]

$N + E = i$

Gerasterte Linien

(Wdhlg.:) Ost, d.h. $y_{i+1} = y_i$, wenn

$$(i+1) \cdot \Delta y / \Delta x < y_i - y_0 + ½$$

$$(N+E+1) \cdot \Delta y / \Delta x < N + ½$$

$$2 \cdot N \cdot \Delta y + 2 \cdot E \cdot \Delta y + 2 \cdot \Delta y < 2 \cdot N \cdot \Delta x + \Delta x$$

$$\underbrace{\mathbf{N \cdot 2 \cdot (\Delta y - \Delta x) + E \cdot 2 \cdot \Delta y + 2 \cdot \Delta y - \Delta x}}_{\mathbf{d}} \mathbf{< 0}$$

Zur Erinnerung: Bei der ersten Entscheidung ⇔ i = N = E = 0
„Ost-Bedingung“: $2\Delta y - \Delta x < 0$

Bresenham‘s Strategie: Einrichtung einer „decision variable“ **d**, die mit $\mathbf{2 \cdot \Delta y - \Delta x}$ initialisiert und nach jeder Folge-Entscheidung um $\mathbf{2\Delta y}$ (Ost) bzw. $\mathbf{2 \cdot (\Delta y - \Delta x)}$ (Nordost) erhöht wird.

Gerasterte Linien


```
void MidpointLine (int x0,int y0, int xn,int yn)
{ int dx, dy, d;
  int incrE, incrNE;     /*Increments for E & NE*/
  int x=x0,  y=y0;       /*Start & current pixel*/

  dx=xn-x0;  dy=yn-y0;  d=2*dy-dx;
  incrE=2*dy; incrNE=2*(dy-dx);   /*Increments */

  for (x=x0; x < xn; x++) /*last pixel omitted!*/
  { SetPixel (x, y);
    if (d < 0) { d += incrE;        }/*choose E*/
    else       { d += incrNE; y++; }/*choose NE*/
  }
  return;
}
```

Herleitung für 1. Oktanten (o.B.d.A.): $m \leq 1$

⇨ Anpasssung unter Nutzung von Symmetrien! (Übung!)

Gerasterte Linien

Besonderheiten / Vorzüge des Bresenham-Algorithmus („Bresenham‘s algorithm for scan-converting straight lines“):

- Nutzung der Tatsache, daß Pixel diskret sind:
  $x_{i+1} = x_i + 1 \Rightarrow x_{i+j} = x_i + j \Rightarrow y(x_j) = y_0 + j \cdot m$
- Verknüpfung algorithmischer Vorgänge (Entscheidungen) mit Variablen-Werten:
  $N = y_i - y_0 \; ; \; N + E = i$
- Entscheidung über Hinzunahme von Folgepixel anhand des zuletzt gesetzten Pixels (ohne Geraden-Steigung m)
- Ganzzahlige Addition und Subtraktion
- Je Linie nur 3 ganzzahlige Multiplikationen mit 2 (Hw!)
- Erweiterbar auf Kreise und Ellipsen (in obiger Form)
- Repetierbar u. (grundsätzlich) in der Richtung umkehrbar (Löschung mit Hintergrund-Farbe)
- Läßt in obiger Version den letzten Punkt aus (Polygone: letzter Punkt = erster ⇨ Flimmern, Löcher im Papier)

Übung

Übung: Implementierung des Bresenham-Algorithmus für alle Oktanten mit ASCII-Zeichen als Bildpunkten:

(i) Erweiterung des Algorithmus

(ii) Feststellung / Sicherstellung der Umkehrbarkeit

Zu allen Übungen:

- *.obj-Dateien größtenteils mitgeliefert
  (pro Fehler-Lokalisierung)
- Aufgaben mit großen Anteilen zur Wiederverwendung
  (contra Altlast-Ansammlung)

`BresenLine.exe`