

Bild: CAD-Kurs Uni Wuppertal, 1983

„Weiche“/„glatte“ Kurven („Beschreibung von Luftschlangen im Raum“) in Mathematik / Technik / Computergrafik für:

- Interpolation zwischen Meßwerten bei unbekanntem mathematischem Zusammenhang

Temperatur, Verschmutzung, Wasserstand (Überflutung), Wasser-/Stromverbrauch, Wirkung von Medikamenten

- Gestaltung industrieller Erzeugnisse (insb. seit CAD)

Design, Aerodynamik (Autos, Flugzeuge, Geräte)

Ersatz für Ton-/Holzprototypen und Straklatten* (Splines)

- Animation (Gelenkfiguren, Insekten)

Bahn, Geschwindigkeit

- Farbverläufe ...

* das Strak: (aerodynamische) Konturlinie eines Bootskörpers



Wunsch: Formulierung für Wertverläufe als Polynom

Vorteile gegenüber Meßwerten: Mathematische Darstellung

- (...) ist genau und erlaubt Berechnung der Kurveneigenschaften (Steigung, Krümmungsradius etc.)
- (...) kann leicht auf einen Computer übertragen werden
- (...) kann leicht zu Grafiken verarbeitet werden
- (...) macht aufwendige Interpolationen überflüssig,
- (...) läßt sich leicht variieren (z.B. skalieren) und der jeweiligen Gestaltungsaufgabe anpassen

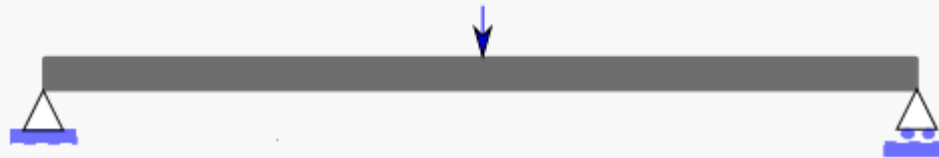
Klassischer Lösungsansatz:

Interpolation durch $n+1$ gegebene Punkte $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ liefert Polynom n -ten Grades – z.B. nach Newton:

$$y(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + b_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

Problem: Schwingungen bei Polynomen höheren Grades
Maßnahme: Loslösung vom Gedanken, ein Polynom zur Annäherung einer Kurve zu finden.

Vorbild: Balken-Biegung (Mechanik – vgl. physischer Spline)



Krümmung $\kappa(x)$ als Kehrwert des Krümmungsradius $r(x)$ und als 2. Ableitung der Biegelinie $y(x)$:

$$\kappa(x) = 1/r(x) \approx y''(x) = M_B(x) / (E \cdot I) , \text{ darin:}$$

$\kappa(x)$: die Krümmung entlang des Balkens;

$r(x)$: der Krümmungsradius

$M_B(x)$: das Biegemoment: lineare Funktion d. Entfernung von d. Stützstelle

E : der Elastizitätsmodul (Materialkonstante) $\approx \text{const.}$

I : das Flächenträgheitsmoment (Kennwert für die Belastbarkeit der Balken-Geometrie) $\approx \text{const.}$

Spline-Biegelinie:

$$y''(x) = a \cdot x + b$$

Mathematischer Ansatz nach zweimaliger Integration:

Verlauf der Biegelinie zwischen je zwei Stützpunkten als kubische Gleichung – zweckmäßige Formulierung der **n Kurvensegmente** zwischen **n+1 Punkten** $(x_0 ; y_0) \dots (x_n ; y_n)$:

$$s_i(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i$$

mit $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, $i=0, \dots, n-1$

Forderungen:

- α)** $s_i(x_i) = y_i$; (Interpolationsbedingung,
 $s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$ $i=0, \dots, n-1$ Stützpunkte)
- β)** $s_i(x_i) = s_{i-1}(x_i)$ $i=1, \dots, n-1$ (Stetigkeit)
- γ)** $s'_i(x_i) = s'_{i-1}(x_i)$ $i=1, \dots, n-1$ (Knickfreiheit)
- δ)** $s''_i(x_i) = s''_{i-1}(x_i)$ $i=1, \dots, n-1$ (Glattheit)

Erste Erwähnung 1946:

Isaac Jacob Schoenberg (*1903 RO ; † 1990 USA)



Bild: Wikipedia

Splines

Jedes Kurvensegment $s_i(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i$ ($x_i \leq x \leq x_{i+1}$, $i=0, \dots, n-1$) hat 4 eigene Freiheitsgrade (Parameter a_i, b_i, c_i, d_i). Zu ihrer Festlegung sind je 4 Gleichungen nötig: $4n$ Gln für n Segmente bei $n+1$ Punkten.

Beiträge der Punkte (sog. „Knoten“) – z.B. beim „natürlichen“ Spline (ohne Krümmung an den Kurven-Enden):

	Durchgang Interpolations- bedingung	Knickfreiheit Stetigkeit $s'(x)$	Glattheit Stetigkeit $s''(x)$
Anfangspunkt	$s_0(x_0) = y_0$		$s''_0(x_0) = 0$
Zwischenpunkte ($1 \leq i \leq n-1$)	$s_{i-1}(x_i) = y_i$ $s_i(x_i) = y_i$	$s'_{i-1}(x_i) = s'_i(x_i)$	$s''_{i-1}(x_i) = s''_i(x_i)$
Endpunkt	$s_{n-1}(x_n) = y_n$		$s''_{n-1}(x_n) = 0$

Vorausberechnungen:

- 1. Ableitung von $s_i(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i$
 $ds_i(x)/dx = [ds_i(x) / d(x-x_i)] \cdot [d(x-x_i) / dx] = [ds_i(x) / d(x-x_i)]$
 $s'_i(x) = 3a_i(x-x_i)^2 + 2b_i(x-x_i) + c_i \quad =1$
- 2. Ableitung entsprechend:
 $d^2s_i(x)/dx^2 = ds'_i(x) / dx$
 $s''_i(x) = 6a_i(x-x_i) + 2b_i$

Beispiel: Natürlicher Spline durch nur 2 Punkte $(x_0; y_0), (x_1; y_1)$, $x_1 \neq x_0$

$$s''_0(x_0) = 6a_0(x_0-x_0) + 2b_0 = 2b_0 = 0 \Rightarrow b_0 = 0$$

$$s''_0(x_1) = 6a_0(x_1-x_0) + 2b_0 = 6a_0(x_1-x_0) + 0 = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

$$\text{d.h.: } s_0(x) = c_0(x-x_0) + d_0 \text{ mit } x_0 \leq x \leq x_1$$

Der Spline verkommt zur Strecke zwischen $(x_0 ; y_0)$ und $(x_1 ; y_1)$:
linearer Spline

Spline-Berechnung durch $n+1$ Knoten $(x_0 ; y_0) \dots (x_n ; y_n)$:

$$s_i(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i \quad (x_i \leq x \leq x_{i+1}; i=0, \dots, n-1)$$

1. Durchgang durch Startknoten, i -tes Kurvensegment **[α]**:

$$s_i(x_i) = a_i \underbrace{(x_i-x_i)^3}_{=0} + b_i \underbrace{(x_i-x_i)^2}_{=0} + c_i \underbrace{(x_i-x_i)}_{=0} + d_i = y_i$$

\Rightarrow $d_i = y_i$ (A)

2. Stetigkeit von $s''(x)$ an den inneren Knoten $i=1, \dots, n-1$ **[δ]**:

$$s''_{i-1}(x_i) = 6a_{i-1}(x_i-x_{i-1}) + 2b_{i-1} = s''_i(x_i) = 6a_i \underbrace{(x_i-x_i)}_{=0} + 2b_i$$

$\Rightarrow a_{i-1} = (b_i - b_{i-1}) / [3(x_i - x_{i-1})]$,

bzw., mit der Abkürzung $h_{i-1} = x_i - x_{i-1}$ („Schrittweite ab x_{i-1} “)

\Rightarrow $a_{i-1} = (b_i - b_{i-1}) / [3 h_{i-1}]$ (B)

3. Stetigkeit von $s(x)$ an den inneren Knoten $i=1, \dots, n-1$ **[β]:**

$$\begin{aligned} s_{i-1}(x_i) &= a_{i-1}(x_i - x_{i-1})^3 + b_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2 + c_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + d_{i-1} \\ &= s_i(x_i) = a_i \underbrace{(x_i - x_i)^3}_{=0} + b_i \underbrace{(x_i - x_i)^2}_{=0} + c_i \underbrace{(x_i - x_i)}_{=0} + d_i \end{aligned}$$

bzw., mit $h_{i-1} = x_i - x_{i-1}$

$$a_{i-1} h_{i-1}^3 + b_{i-1} h_{i-1}^2 + c_{i-1} h_{i-1} + d_{i-1} = d_i$$

Einsetzen von (A) und (B) ergibt:

$$(b_i - b_{i-1}) h_{i-1}^2 / 3 + b_{i-1} h_{i-1}^2 + c_{i-1} h_{i-1} + y_{i-1} = y_i$$

$$\Rightarrow \boxed{c_{i-1} = (y_i - y_{i-1}) / h_{i-1} - (2 b_{i-1} + b_i) h_{i-1} / 3} \quad (C)$$

4. Stetigkeit von $s'(x)$ an den inneren Knoten $i=1, \dots, n-1$ **[Y]:**

$$\begin{aligned} s'_{i-1}(x_i) &= 3a_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2 + 2b_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + c_{i-1} \\ &= s'_i(x_i) = 3a_i \underbrace{(x_i - x_i)^2}_{=0} + 2b_i \underbrace{(x_i - x_i)}_{=0} + c_i \end{aligned}$$

Einsetzen von a_{i-1} (aus B), c_{i-1} , c_i (aus C) und h_{i-1} , h_i ergibt:

$$\begin{aligned} (b_i - b_{i-1}) h_{i-1} + 2 b_{i-1} h_{i-1} + (y_i - y_{i-1}) / h_{i-1} - (2 b_{i-1} + b_i) h_{i-1} / 3 \\ = (y_{i+1} - y_i) / h_i - (2 b_i + b_{i+1}) h_i / 3 \end{aligned}$$

Umordnen separiert die Unbekannten b_{i-1} , b_i und b_{i+1} :

$$\Rightarrow h_{i-1} b_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) b_i + h_i b_{i+1} = 3 \left[\underbrace{(y_{i+1} - y_i) / h_i - (y_i - y_{i-1}) / h_{i-1}}_{\text{bekannte Größen}} \right]$$

ausgeschrieben für $i=1, \dots, n-1$:

$$h_0 \mathbf{b}_0 + 2(h_0 + h_1) b_1 + h_1 b_2 = 3 \left[(y_2 - y_1) / h_1 - (y_1 - y_0) / h_0 \right]$$

:

$$h_{n-2} b_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1}) b_{n-1} + h_{n-1} \mathbf{b}_n = 3 \left[(y_n - y_{n-1}) / h_{n-1} - (y_{n-1} - y_{n-2}) / h_{n-2} \right]$$

Zwischenbilanz:

Die Berechnung der Parameter für die n Kurvensegmente eines kubischen Splines $s_i(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i$ ($i=0, \dots, n-1$) durch die $n+1$ Knoten $(x_0 ; y_0) \dots (x_n ; y_n)$ erfordert

- für d_i nur die Punktkoordinaten,
- für a_i, c_i, b_i zudem die b_i -Werte des jeweils vor- und nachgelagerten, benachbarten Kurvensegments.

Da es zu b_0 kein vor-, zu b_{n-1} kein nachgelagertes Segment gibt, werden diese aus sog. Randbedingungen berechnet – beim natürlichen Spline aus $s''_0(x_0)=0$ und $s''_{n-1}(x_n)=0$:

$$s''_0(x_0) = 6a_0(x_0-x_0) + 2b_0 = 0 \Rightarrow b_0 = 0$$

$$\begin{aligned} s''_{n-1}(x_n) &= 6a_{n-1}(x_n-x_{n-1}) + 2b_{n-1} = 6 h_{n-1}(b_n-b_{n-1})/[3 h_{n-1}] + 2b_{n-1} \\ &= 2 (b_n-b_{n-1}) + 2b_{n-1} = 0 \Rightarrow b_n = 0 \end{aligned}$$

- Die Spline-Berechnung benötigt d.Lösung des Gl.systems

$$\underline{H} \cdot \underline{b} = \underline{k} \Leftrightarrow \underline{b} = \underline{H}^{-1} \cdot \underline{k}$$

[Zur Erinnerung – für n Kurvensegmente zw. n+1 Knoten:

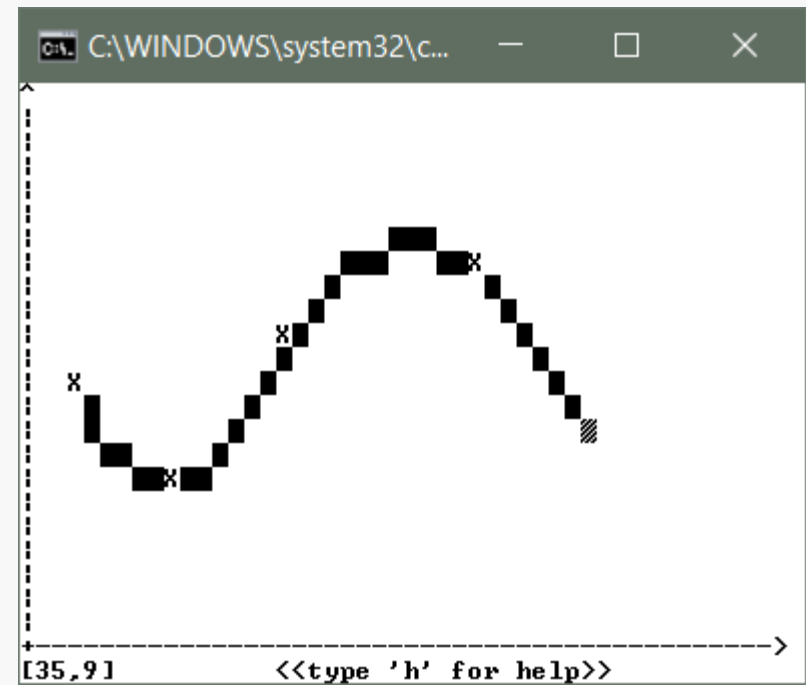
\underline{H} : (n-1) x (n-1); \underline{b} : (n-1) x 1; \underline{k} : (n-1) x 1]

- Mit den b_i -Werten aus \underline{b} können mit den Gleichungen (A), (B) und (C) alle Kurvensegmente exakt bestimmt werden.
- Die Koeffizientenmatrix \underline{H} ist tridiagonal: Sie hat nahezu die nötige Stufenform zur Anwendung der Gaußschen Eliminationsmethode. (I.d.R. ist Pivotisierung entbehrlich.)
- Wegen ihrer schwachen Besetzung werden für \underline{H} nur ein (n-1)-Vektor für die Hauptdiagonale und ein (n-2)-Vektor für d.(untereinander gleichen) Nebendiagonalen gehalten. Die Lösung des Gl.systems erfordert dann nur lineare Zeit [$\sim n$ statt $\sim n^3$ bei vollständiger Pivotisierung].

Splines

Übung:

Vervollständigung eines Programms zur Zeichnung von Splines mit ASCII-Zeichen nach interaktiver Eingabe von Stützstellen (s. Übungsblatt).



Implementierungshinweise:

- Die Lösung des Gleichungssystems $\underline{H} \cdot \underline{b} = \underline{k}$ zur Bestimmung der Koeffizienten b_i erfolgt typischerweise in `float` (und entsprechend a_i , c_i aber auch d_i).

Knoten-Koordinaten sind oft als `int` (Pixel) deklariert.

Da $s_i(x)$ immer zu einem diskreten x -Wert errechnet wird, kann für allgemeine Interpolationsaufgaben (Fluttiefe, Lufttemperatur, Tumorwachstum, Windstärke...) zwischen einem `int`-Skalierungsfaktor und `float` gewählt werden.

- Zur Ermittlung eines konkreten Interpolationswertes (z.B.: Pixels) wird anhand des x -Wertes das dazugehörige Segment i mit den Koeffizienten a_i , b_i , c_i und d_i bestimmt und daraus der y -Wert, d.h. $s_i(x)$, berechnet.

Spline-Anwendungen:

- Durch Zuweisung einer z-Koordinaten an die Knoten lassen sich 3D-Flächen mit weicher Krümmung gestalten (Fahnen, Dünen, virtuelle Kleider).
- Erzeugung von Kurven mit vertikalen Verläufen durch parametrische Darstellung: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $0 \leq t \leq 1$.
Der Parameter t ist dann der bereits durchlaufene Anteil der aktuellen Schrittweite: $t = (x-x_i) / (x_{i+1}-x_i)$.
Die Schrittweiten für t werden jeweils abhängig von den Anforderungen der Anwendung gewählt;
Kurvenpunkte werden ggf. durch geradlinige Segmente verbunden.
- Besonders beliebt im Fahrzeug- und Flugzeugbau (Aerodynamik)

Anmerkungen:

- Es läßt sich beweisen, daß mit Splines eine minimale Gesamtkrümmung bei glatter Führung entsteht.
- Mit Splines lassen sich keine exakten Kreise, Ellipsen und trigonometrische Funktionen zeichnen.
- Je nach Ziel der Anwendung wird oft nicht nach b_i , sondern z.B. nach $s'_i(x_i)$ oder $s''_i(x_i)$ aufgelöst (je $n-1$ Unbekannte, wie b_i).
- Anstelle des natürlichen Splines ($s''_0(x_0) = s''_{n-1}(x_n) = 0$) können auch andere Forderungen gelten, z.B.:
 - $s'_0(x_0) = s'_{n-1}(x_n) = 0$
(waagerechte Enden / eingespannter Balken)
 - $s_0(x_0) = s_{n-1}(x_n) \ \&\& \ s'_0(x_0) = s'_{n-1}(x_n) \ \&\& \ s''_0(x_0) = s''_{n-1}(x_n)$
(„periodischer Spline“)

