Übung Nr. 7:

Grundzüge der Informationstheorie

1. Sie sollen die Gewinnsituationen, die in einem neuen Würfelspiel auftreten können, binär codieren. Es soll mit 2 Würfeln gespielt werden, und die Gewinnchancen hängen von der insgesamt gewürfelten Augenzahl w ab, wobei zwischen folgenden Gewinnsituationen unterschieden wird:

Gewinnsituation a: $2 \leq w_a \leq 4$

Gewinnsituation b: $5 \leq w_b \leq 6$

Gewinnsituation c: $7 \leq w_c \leq 8$

Gewinnsituation d: $w_d = 9$

Gewinnsituation e: $10 \leq w_e \leq 11$

Gewinnsituation f: $w_f = 12$

Nehmen Sie bitte die Binärcodierung vor, indem Sie folgende Teilaufgaben behandeln:

a) Bei näherem Hinsehen erkennt man, daß das Spiel mit zwei Würfeln genau 36 Situationen hervorbringen kann. Zählen Sie bitte diese Situationen in der folgenden Liste auf, geordnet nach Gesamtzahl der Würfelaugen, und geben Sie die dazugehörige Wahrscheinlichkeit p(w) dafür an, daß diese Augenzahl gewürfelt wird; eine Zeile ist bereits als Beispiel ausgefüllt:

$w_i = \Sigma$ (Augenzahl)	**Augenzahl-Kombination einzelner Würfel**	**$p(w_i)$**
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9	3+6; 4+5; 5+4; 6+3	4 / 36
10		
11		
12		
		Summe: 36/36

b) Bitte tragen Sie nun in der u.a. Tabelle die Wahrscheinlichkeiten für die hier betrachteten Situationen in diesem Würfelspiel ein; auch hier ist einer der Einträge bereits eingesetzt:

Situation x_i (x_i=a,…,f)	**$p(x_i)$**
a: $2 \leq w_a \leq 4$	
b: $5 \leq w_b \leq 6$	
c: $7 \leq w_c \leq 8$	
d: $w_d = 9$	4 / 36
e: $10 \leq w_e \leq 11$	
f: $w_f = 12$	

c) Wie hoch ist der mittlere Informationsgehalt H der hier geschilderten Nachrichten (Situationen) a, …, f?

Hinweis: Es genügt, ein Ergebnis mit der Genauigkeit einer Nachkommastelle zu errechnen (empfohlen: Zwischenergebnisse mit 2 Nachkommastellen); dazu reichen auch die gerundeten Einträge der folgenden Tabelle:

x	lg x	x lg x
2	0,30	0,60
3	0,48	1,43
4	0,60	2,40
5	0,70	3,50
6	0,78	4,67
7	0,85	5,92

x	lg x	x lg x
8	0,90	7,22
9	0,95	8,59
11	1,04	11,45
12	1,08	12,95
21	1,32	27,77
36	1,56	56,03

H =

d) In welcher Einheit wird der mittlere Informationsgehalt H berechnet (s. vorausgegangene Teilaufgabe)?

e) Es soll eine konkrete Codierung für die Gewinnsituationen im besprochenen Würfelspiel gefunden werden. Welche mittlere Anzahl m von Binärstellen ist zu erwarten anhand der bisherigen Betrachtungen?

Geben Sie bitte m mit Wert und Einheit an! Schreiben Sie bitte explizit dazu, ob es sich dabei um einen exakt erreichbaren, um einen Minimal- oder einen Maximalwert handelt!

f) Für das hier diskutierte Würfelspiel soll eine Codierung nach der Methode von Fano ermittelt werden.

Ermitteln Sie bitte den dazugehörigen Code, indem Sie die u.a. Tabelle ergänzen!

Situation x_i	**$p(x_i)$**	**$\Sigma p(x_i)$**	**Code**	**$m(x_i)$**

g) Erstellen Sie nun bitte den Binärbaum, der sich aus der Anwendung der Fano-Methode ergibt:

h) Rechnen Sie bitte vor, wie hoch die mittlere Binärstellenzahl bei der Codierung nach Fano ist:

m =

i) Ermitteln Sie nun bitte den Binärcode nach der Huffman-Methode:

x_i	$p(x_i)$

x_i	$p(x_i)$

x_i	$p(x_i)$

x_i	$p(x_i)$

x_i	$p(x_i)$

x_i	$p(x_i)$

j) Erstellen Sie bitte auch den Binärbaum, der sich aus der Anwendung der Huffman-Methode ergibt:

k) Tragen Sie bitte in der untenstehenden Tabelle zum Vergleich die Binärcodierung ein, die sich aus der Anwendung der Huffman-Methode ergibt:

Situation x_i	Code	$m(x_i)$

l) Rechnen Sie bitte vor, wie hoch die mittlere Binärstellenzahl bei der Codierung nach Huffman ist:

m =