Dipl. Math. Florian Hauck	**Klausur**	WS 2010
FH Gießen-Friedberg	**Mathematik II**	10.02.2011
	Studium EI	

Name:	Vorname:	Matrikelnummer:	Bachelor **B** Diplom **D**

Folgende Hinweise bitte unbedingt zuerst durchlesen und beachten:

- Aufgabenblatt bitte sofort in **GROSSER DRUCKSCHRIFT** ausfüllen
- die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**
- bei **Bachelor** großes **B**, bei **Diplom** großes **D** in der rechten oberen Ecke eintragen
- alle abzugebenden Blätter sind mit **Ihrem Namen** zu kennzeichnen
- für **jede** Aufgabe bitte ein **neues Blatt** beginnen
- Lösungen gelten nur, wenn alle **Zwischenschritte** erkennbar sind
- nur die **in der Vorlesung behandelten Programme** sind erlaubt
- bitte **RUNDEN** Sie auf **fünf** Nachkommastellen
- **ein** selbsterstelltes Blatt mit Formeln ist zulässig, keine weiteren Hilfsmittel
- **Abgabe: Aufgabenblatt**, Aufgaben in **richtiger Folge 1,2,3...,** keine Klammerheftung

1) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen (bezüglich x, y und z)
der folgenden Funktionen:
a) $f(x,y,z) = 3xy^2 + z^2\left(cos(x) - sin(z)y^2\right)$
b) $h(x,y,z) = 3z^2e^{2x}ycos(y) - 3y^2\left(2z+3\right)^2 - 5\sqrt{x}$

Lösung:

a) $f_x(x,y,z) = 3y^2 - z^2sin(x)$
$f_y(x,y,z) = 6xy - 2yz^2sin(z)$
$f_z(x,y,z) = 2z(cos(x) - sin(z)y^2) - y^2z^2cos(z)$
b)$h_x(x,y,z) = 6z^2e^{2x}ycos(y) - \frac{5}{2\sqrt{x}}$
$h_y(x,y,z) = 3z^2e^{2x}cos(y) - 3z^2e^{2x}ysin(y) - 6y(2z+3)^2$
$h_z(x,y,z) = 6ze^{2x}ycos(y) - 12y^2(2z+3)$

2) B bezeichne das Flächenstück, dass von der Y-Achse und den Funktionen $f(x) = 3$ und $g(x) = x$ umrandet wird (Skizze!). Bestimmen Sie

$$\int\int_B (3x^2y + 3)\ dxdy$$

Lösung:

$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3, x \leq y \leq 3\}$

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \int_x^3 3x^2y + 3dydx &= \int_0^3 \left[\frac{3}{2}x^2y^2 + 3y\right]_x^3 dx \\
&= \int_0^3 (\frac{27}{2}x^2 + 9 - \frac{3}{2}x^4 - 3x)dx \\
&= \left[9x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 - \frac{3}{10}x^5\right]_0^3 \\
&= 27 - \frac{27}{2} + \frac{243}{2} - \frac{729}{10} \\
&= 62.1
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \int_0^y 3x^2y + 3dxdy &= \int_0^3 \left[x^3y + 3x\right]_0^y dy \\
&= \left[\frac{1}{5}y^5 + \frac{3}{2}y^2\right]_0^3 \\
&= \frac{243}{5} + \frac{27}{2} = 62.1
\end{aligned}$$

3) Bestimmen Sie den Umfang der Fläche M, die von den Funktionen $f(x) = e^{x^2}$ und $g(x) = x + 2$ eingeschlossen wird (Skizze!), mit dem Simpson-Verfahren ($n = 16$) und führen Sie eine Fehlerabschätzung durch.

3) Lösung:

$f(x) = e^{x^2}$ und $g(x) = x + 2$. Hiermit folgt $h(x) = e^{x^2} - x - 2 = 0$

Mit Newton folgt: $x_1 = -0.58761$ und $x_2 = 1.05710$

Hiermit folgt für den Umfang

$$\begin{aligned} U &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (2xe^{x^2})^2} dx + \sqrt{2}(x_2 - x_1) \\ \text{exakt} &= 5.548656 \\ S_{16} &= 5.54884 \\ S_8 &= 5.5514 \\ \tilde{\Delta}_{16} &= \frac{S_{16} - S_8}{15} = -0.00017 \end{aligned}$$

4) Es seien das Kraftfeld $F(x, y, z) = (3y^2 + e^{x+2z}, 6xy + 3z, 2e^{x+2z} + 3y)$ und die Kurven $k_1(t) = (t, 1 - t, 2)$, $k_2(t) = (1 - t^2, e^t, sin(t\pi))$ mit $t \in [0, 2]$ gegeben.

a) Wo beginnen und enden die Kurven $k_1(t)$ und $k_2(t)$?

b) Ist $F(x, y, z)$ ein Gradientenfeld?

c) Berechnen Sie $\int\limits_{k_3} F$ für den geradlinigen Weg k_3 von $P(1/1/0)$ nach $Q(0/0/1)$.

d) Wie verändert sich $\int F$, falls man den Anfangspunkt P und den Endpunkt Q des Weges aus Aufgabenteil c) vertauscht?

Lösung:

a) $k_1(0) = (0, 1, 2), k_1(2) = (2, -1, 2)$ sowie $k_2(0) = (1, 1, 0), k_2(2) = (-3, e^2, 0)$

c) $F(x, y, z)$ ist Gradientenfeld, da

$$\begin{aligned} F_{1y} = 6y = F_{2x}; \quad F_{1z} = 2e^{x+2z} = F_{3x}; \quad F_{2z} = 3 = F_{3y} \\ \Phi(x, y, z) = 3xy^2 + e^{x+2z} + 3yz + C \end{aligned}$$

b) $W = \int_k F = \Phi(0, 0, 1) - \Phi(1, 1, 0) = e^2 - 3 - e \approx 1.67078$

d) $W = \Phi(1, 1, 0) - \Phi(0, 0, 1) = -1.67078$

5) Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen exakt und bestimmen Sie jeweils $y(1)$:

a) $y'y - 2 = -x^3$ mit $y(0) = 2$

Es folgt mit TdV: $\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{4}x^4 + 2x + c \Longleftrightarrow y(x) = \pm\sqrt{-\frac{1}{2}x^4 + 4x + C}$,

und wegen $y(0) = 2$ muss gelten: $y(x) = \sqrt{-\frac{1}{2}x^4 + 4x + 4}$

Also haben wir $y(1) = \sqrt{7.5}$

b) $2y' - 2e^{x-y} = 0$ mit $y(0) = ln(2)$

Wir benutzen wieder TdV: $e^y = e^x + C \Longleftrightarrow y(x) = ln(e^x + C)$

und wegen $y(0) = ln(2)$ gilt:$y(x) = ln(e^x + 1)$

Also haben wir $y(1) = ln(e + 1)$

6) Bestimmen Sie die allgemeine homogene Lösung sowie den Ansatz für eine spezielle inhomogene Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$y'''' + 2y''' - 13y'' - 14y' + 24y = 3e^x(x^2 + x) + sin(x)$$

<u>Lösung:</u>

Homogene Lösung: $P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 3)(\lambda + 4) \stackrel{!}{=} 0$

Hiermit folgt: $y_h(x) = c_1e^x + c_2e^{-2x} + c_3e^{3x} + c_4e^{-4x}$

Für den speziellen Ansatz benutzen wir die Tabelle:

λ	$r(x)$	α	β	s	k	grad q	Ansatz
1;-2;3;-4	$3e^xx^2$	1	0	1	1	2	$xe^x[Ax^2 + Bx + C]$
1;-2;3;-4	$3e^xx$	1	0	1	1	1	$xe^x[Dx + E]$
1;-2;3;-4	$sin(x)$	0	1	i	0	0	$Fsin(x) + Gcos(x)$

Hiermit foglt: $y_s(x) = xe^x[Ax^2 + \tilde{B}x + \tilde{C}] + Fsin(x) + Gcos(x)$

7) Drei Freunde spielen ein Kartenspiel mit 32 Skat-Karten. Jeder von Ihnen erhält 8 Karten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) Spieler 1 alle 4 Asse bekommt?

b) Spieler 1 und Spieler 2 zusammen 3 Buben bekommen?

c) keiner der Spieler ein Ass bekommt?

<u>Hinweis:</u> Es gibt von jeder Sorte (z.B: Bube, Dame, Ass) jeweils 4 Karten im Skatspiel

7) Lösung:

Entweder mit $\Omega = \{1, 2, ..., 32\}$ mit $|\Omega| = 32$ (32 Karten) oder
direkt mit der Hypergeometrischen Verteilung über X:
X = Anzahl der "Treffer" beim n maligen Ziehen ohne Zurücklegen
$X \sim H(32, m, n)$
a) $X \sim H(32, 4, 8)$ oder Hypergeometrische Verteilung begründen:
$P(\text{"Spieler1 hat alle Asse"}) = P(X = 4) = \frac{\binom{4}{4}\binom{28}{4}}{\binom{32}{8}} = 0.195\%$
b) $X \sim H(32, 4, 16)$:
$P(\text{"..."}) = P(X = 3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{28}{13}}{\binom{32}{16}} = 24.917\%$
c) $X \sim H(32, 4, 24)$
$P(\text{"..."}) = P(X = 0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{28}{24}}{\binom{32}{24}} = 0.195\%$ (wie in a) !)

8) In einer Urne befinden sich doppelt so viele rote Kugeln wie weiße Kugeln. Insgesamt befinden sich 15 Kugeln in der Urne. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) Sie beim Ziehen der dritten Kugel eine weiße Kugel ziehen, falls Sie jede Kugel nach dem Ziehen wieder zurücklegen?

b) Sie beim Ziehen der zweiten Kugel eine rote Kugel ziehen, falls Sie die erste Kugel nach dem Ziehen <u>nicht</u> zurücklegen?

Lösung:

a) Mit Zurücklegen, also bleiben aufgrund der Unabhängigkeit (Annahme!) die Wahrscheinlichkeiten gleich und es gilt: $P(\text{"weiß im 3ten"}) = \frac{1}{3} = 33.\overline{3}\%$
b) Ohne Zurücklegen, also bedingte Wahrscheinlichkeiten:
$P(\text{"rot im 2ten"}) = P((r, r)) + P((\overline{r}, r)) = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{14} + \frac{1}{3} \cdot \frac{10}{14} = \frac{2}{3} = 66.\overline{6}\%$
(Bei der Lösung ist ein Baum vorteilhaft)

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	6	4	5	6	4	6	6	4	41
Erreicht									