

## Übungsaufgaben zur Mathematik

### Analysis im $\mathbb{R}^n$

1. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich  $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$  und die partiellen Ableitungen  $f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx}$  von

(a)  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

(c)  $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xe^y}$

(b)  $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

(d)  $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

2. Bestimmen Sie die Tangentialebene folgender Funktionen  $f(x, y)$  im Punkt  $(2, 1)$ . Wo hat  $f$  eine horizontale Tangentialebene? Besitzt  $f$  Extremwerte?

(a)  $f(x, y) = 3x^2y - 2xy^3 + 10x$

(b)  $f(x, y) = x^2 - xy^2 + y^3$

3. Bestimmen Sie die Extremwerte folgender Funktionen  $f(x, y) =$

(a)  $x^2y(4 - x - y)$

(c)  $x^3y^2(1 - x - y)$

(b)  $y^2 - 2xy$

(d)  $x^2 + xy + y^2 + \alpha x + \beta y \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

4. Sei  $Q$  ein quaderförmiger Kasten, der oben offen ist (also keinen Deckel besitzt). Wie muss dieser Kasten konstruiert werden, damit er ein gegebenes Volumen  $V$  fasst und dabei seine Oberfläche minimal ist?

5. Bestimmen Sie die Extremwerte von  $f(x, y)$  unter der Nebenbedingung  $N$ :

(a)  $f(x, y) = xy \quad (N: x^2 + y^2 = 2)$

(b)  $f(x, y) = x + y \quad (N: x + y = xy)$

6. Bestimmen Sie die Richtung (Winkel zur x-Achse!) des stärksten Anstiegs der Funktion  $f(x, y)$  in  $p_1 = (1, 1)$  und  $p_2 = (e, \pi)$  mit:

$$f(x, y) = xy; \quad x^2y; \quad xe^y; \quad e^{xy}; \quad e^x \sin y.$$

Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen  $y = g_h(x)$  der  $h$ -Niveaulinien dieser Funktionen und skizzieren Sie die ersten vier für  $h = 2$ .

7. Bestimmen Sie die Ausgleichsgeraden durch  $(k, y_k)$  mit

(a)  $y_k = e^k$

(b)  $y_k = \ln k$

(c)  $y_k = k^2$

(d)  $(k = 1, \dots, 4)$ .

8.  $(x_k, y_k) : (1, 2); (2, 9); (3, 20)$ . Gesucht sind die Ausgleichskurven vom Typ

(a)  $y = a + bx$

(b)  $y = ae^{bx}$

(c)  $y = ax^b$

(d)  $y = (a + bx)^2$

Welche Ausgleichsmethode hat die kleinste Fehlerquadratsumme?