

Übungsaufgaben zur Mathematik

Relationen

1. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Man konstruiere - falls möglich:
 - (a) eine Relation $R \subset A \times B$, die keine Funktion ist;
 - (b) eine Funktion $f : A \rightarrow B$, die weder injektiv noch surjektiv ist;
 - (c) eine injektive Funktion $f : A \rightarrow B$, die nicht surjektiv ist;
 - (d) eine bijektive Funktion $f : A \rightarrow B$.

2. Welche der folgenden Relationen auf M sind reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv, linear, Äquivalenzrelationen, Präordnungen, Halbordnungen?

(a)	$M = \mathbb{N}$	aRb	$:\Leftrightarrow$	$a b$	
(b)	$M = \mathbb{N}$	nRm	$:\Leftrightarrow$	$n m \vee m n$	
(c)	$M = \{1, 2, 4, 7\}$	nRm	$:\Leftrightarrow$	$n m \vee m n$	
(d)	$M = \{1, 2, 4, 7, 12\}$	nRm	$:\Leftrightarrow$	$n m$	
(e)	$M = \mathbb{R}$	xRy	$:\Leftrightarrow$	$xy \geq 1$	
(f)	$M = \mathbb{C}$	zRw	$:\Leftrightarrow$	$ z \leq w $	
(g)	M K -Vektorraum	xRy	$:\Leftrightarrow$	$\exists \lambda \in K : y = \lambda x$	(K Körper)
(h)	$M = p(S)$	$A\rho B$	$:\Leftrightarrow$	$A \cap B = \emptyset$	
(i)	$M = p(S)$	$A\rho B$	$:\Leftrightarrow$	$A \subset (S \setminus B)$	
(j)	$M = \{\text{Menschen}\}$	aRb	$:\Leftrightarrow$	a ist Sohn von b .	
(k)	$M = \{\text{Menschen}\}$	aRb	$:\Leftrightarrow$	a steht in Rufweite von b .	
(l)	$M = \{\text{Menschen}\}$	xRy	$:\Leftrightarrow$	x und y haben gemeinsame Vorfahren.	

3. $f : X \rightarrow Y$ Funktion; $a, b \in X$. Man definiere $aRb :\Leftrightarrow f(a) = f(b)$. Zeigen Sie: R ist eine Äquivalenzrelation auf X

4. $(G, *)$ sei eine Gruppe, $(U, *)$ eine Untergruppe von $(G, *)$. Definiere für $x, y \in G$: $xRy :\Leftrightarrow \bar{x} * y \in U$. (\bar{x} Inverse von x in G). Ist R eine Äquivalenzrelation auf G ?

5. $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 1000\}$. Man definiere:
 $nRm :\Leftrightarrow n$ und m bestehen aus denselben Ziffern.
 - (a) Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation auf M ist.
 - (b) Wie viele Äquivalenzklassen gibt es?