Übungsblatt06 - Berechnungsprobleme und Komplexitätsklassen

TH Mittelhessen, FB MNI, Berechenbarkeit und Komplexität, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

Im Folgenden finden Sie eine Liste von Sprachen, die Berechnungsprobleme darstellen. Bilden Sie sich eine Meinung, ob diese jeweils in P, NP, co-NP oder außerhalb dieser Komplexitätsklassen liegen.

- Falls Sie der Meinung sind, ein Berechnungsproblem liegt in P, geben Sie einen Polynomialzeitalgorithmus mit Laufzeitanalyse an.
- Falls das nicht gelingt, und Sie glauben, das Problem liegt in NP, geben Sie einen Nichtdeterministischen Polynomialzeitalgorithmus (mit Laufzeitanalyse) sowie einen Verifier an.
- Falls Sie glauben, das Problem liegt in co-NP, geben Sie einen Polynomialzeitalgorithmus (mit Laufzeitanalyse) und einen Verifier für das Komplement an.
- Falls Sie glauben, das Problem liegt außerhalb von NP $\cup$ co-NP, begründen Sie dies bitte :).

a.) EULER-GRAPHS $= \{G = (V, E) : G$ ist Euler-Graph$\}$.
Erinnerung: Ein Graph ist ein Euler-Graph, wenn er einen Kreis enthält, der jede Kante genau einmal durchläuft (nicht notwendig alle Knoten, isolierte Knoten werden nicht durchlaufen).

b.) HAMPATH $= \{G = (V, E) : G$ ist Hamilton-Graph$\}$.
Erinnerung: Ein Graph ist ein Hamilton-Graph, wenn er einen Kreis enthält, der jeden Knoten genau einmal durchläuft (nicht notwendig alle Kanten).

c.) CLIQUE $= \{(G, k) : G$ ist ungerichteter Graph, $k \in \mathbb{N}$, und G enthält eine k-Clique$\}$.
Definition: Eine $k-$Clique ist eine k-elementige Teilmenge der Knoten, deren Knoten paarweise adjazent sind.

d.) ANTI-CLIQUE $= \{(G, k) :\ k \in \mathbb{N},\ G$ ungerichteter Graph mit k-Anticlique$\}$.
Definition: Eine k-Anticlique ist eine k-elementige Teilmenge der Knoten, deren Knoten paarweise nicht adjazent sind.

e.) Die Menge aller ungerichteter Graphen ohne CLIQUE.
Bemerkung: Das ist natürlich nicht ANTI-CLIQUE :).

f.) VERTEX-COVER $= \{(G, k) : k \in \mathbb{N},\ G$ ungerichteter Graph, mit k-Vertex-Cover$\}$.
Definition: Ein Vertex-Cover ist eine Teilmenge der Knoten (vertex) des Graphen, mit nichtleerem Schnitt zu jeder Kante.

g.) SUBSET-SUM $= \{(S, t) : S = \{x_1, ..., x_n\} \subset \mathbb{N}$ und $\exists\ y_1, ..., y_s \in S$ mit $\Sigma y_i = t\}$.

h.) SAT=$\{$erfüllbare boolesche Formeln$\}$.
Hinweis: Eine Boolesche Formel heißt „erfüllbar", wenn es eine Belegung der Variablen mit 0 und 1 gibt, sodass ihr Wahrheitswert bei dieser Belegung 1 ist.

i.) TQBF=$\{$wahre voll quantifizierte boolesche Formeln$\}$.
Definition: Eine „voll quantifizierte boolesche Formel" ist eine boolesche Formel, der für jede Variable ein Quantor vorausgestellt ist. Sie hat einen eindeutigen Wahrheitswert.
Beispiel: $\exists x_1 : \forall x_2 : (x_1 \vee x_2)$
hat den Wahrheitswert 1, denn wählt man $x_1 = 1$, so ist der Ausdruck für alle x_2 wahr.

j.) COMPOSITES $= \{n \in \mathbb{N} : n = p \cdot q$ für $p, q \in \mathbb{N},\quad p, q > 1\}$

k.) PRIMES $= \{p \in \mathbb{N} : p$ prim$\}$.
Hinweis: Überlegen Sie sich etwas über COMPOSITES und PRIMES, aber die Lösung werden Sie ohne Internet-Recherche kaum finden. Und lassen Sie sich von dem, was Sie finden, nicht abschrecken ;).

Viel Spass und Erfolg!