Übungsblatt 1 - Musterlösung

Technische Hochschule Mittelhessen, Mathematik 1 für EI, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

a)

$$\begin{array}{lll} & 40x - 2 = 30x + 13 & \mid -30x + 2 \\ => & 40x - 30x = 13 + 2 & \mid \text{umformen} \\ => & 10x = 15 & \mid : 10 \\ => & x = 1,5 & \end{array}$$

b.)

In der Rechnung werden beide Seiten durch $x+2$ dividiert. Wenn die Gleichung gilt, ist das Null - denn wenn man die Gleichung auflöst, erhält man die Lösung $x = -2$.

Aufgabe 2

a.) $2^3 \cdot 2^6 = 2^9 = 512$

Angewendet wurde die Regel $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$

Hier: $2^3 \cdot 2^6 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ mal}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2}_{6 \text{ mal}} = \underbrace{2 \cdot ... \cdot 2}_{9 \text{ mal}}$

b.) $(2^3)^2 = 2^6 = 64$

Angewendet wurde die Regel $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$

Hier: $(2^3)^2 = \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2)}_{2 \text{ Dreierblocks}} = 2^{2 \cdot 3}$

c.) $2^{3^2} = 2^{3 \cdot 3} = 2^9 = 512$

Keine besondere Rechenregel, nur die Definition wurde benutzt.

d.) $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$

Ist eine Rechenregel:

$a^b \cdot a^c = \underbrace{a \cdot ... \cdot a}_{b \text{ mal}} \cdot \underbrace{a \cdot ... \cdot a}_{c \text{ mal}} = \underbrace{a \cdot ...... \cdot a}_{b+c \text{ mal}} = a^{b+c}$

e.)

$$(a^b)^{-b} = \frac{1}{(a^b)^b} = \frac{1}{a^{b^2}} = a^{-b^2}$$

Benutzt wurde, dass negative Exponenten bedeuten, dass ein Bruch mit Zaehler 1 und Nenner mit positivem Exponenten gebildet wird.

Aufgabe 3

a.) $\log_{10} 10000 = 4$, weil $10^4 = 10000$

b.) $\log_{10}\left(\frac{1}{10000}\right) = -4$, weil $\frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000}$

c.) $\log_{0,5}\left(\frac{1}{8}\right) = 3$, weil $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

d.) $\log_{0,5} 8 = -3$, weil $\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 8$

e.) $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = -2$, weil $\frac{1}{e^2} = e^{-2}$

f.) $\log_2(1024) = 10$, weil $2^{10} = 1024$

g.) $\log_b(b^r) = r$, weil $b^r = b^r$

Aufgabe 4

a.)

$$
\begin{aligned}
& \sqrt{3x-2} + 3 = 2(x-2,5) && \mid -3, \text{umformen} \\
=> \; & \sqrt{3x-2} = 2x - 8 && \mid \uparrow 2, \text{Lösungen später prüfen auf Scheinlösungen!} \\
=> \; & 3x - 2 = 4x^2 - 32x + 64 && \mid -3x + 2 \\
=> \; & 0 = 4x^2 - 35x + 66 && \mid : 4 \\
=> \; & 0 = x^2 - \frac{35}{4}x + \frac{33}{2}
\end{aligned}
$$

Jetzt pq-Formel: Für $0 = x^2 + px + q$ ist $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Hier: $0 = x^2 - \frac{35}{4}x + \frac{33}{2}$

pq-Formel mit: $p = -\frac{35}{4}$, $q = \frac{33}{2}$ (ok, nicht wirklich schöne Zahlen)

$$
\begin{aligned}
x_{1/2} &= \frac{35}{8} \pm \sqrt{\frac{35\cdot 35}{64} - \frac{33\cdot 32}{64}} \\
&= \frac{35}{8} \pm \frac{1}{8}\sqrt{1225 - 1056} \\
&= \frac{35}{8} \pm \frac{1}{8}\cdot\sqrt{169} = \frac{35}{8} + -\frac{13}{8} \\
=> x_1 &= \frac{48}{8} = 6, \quad x_2 = \frac{22}{8} = \frac{11}{4}
\end{aligned}
$$

Lösungen prüfen, weil "hoch gerader Zahl"genommen wurde:

$x_1 = 6:$ $\quad \sqrt{3\cdot 6 - 2} + 3 \stackrel{?}{=} 2\cdot(6-2,5) => 7 \stackrel{?}{=} 7$ richtig, Lösung.

$x_2 = \frac{11}{4}:$ $\quad \sqrt{\frac{3\cdot 11}{4} - 2} + 3 \stackrel{?}{=} 2\cdot\left(\frac{11}{4} - 2,5\right) => \frac{5}{2} + 3 \stackrel{?}{=} \frac{11}{2} - 5 => 2,5 \stackrel{?}{=} 0,5$
falsch, keine Lösung

b.)

$x-3a=\frac{1+a-2a^2}{x} \quad |\cdot x$

$=> x^2-3ax=1+a-2a^2 \quad |-1-a+2a^2$

$=> x^2-3ax-1-a+2a^2=0$

pq-Formel mit $p=-3a, \quad q=-1-a+2a^2$

$=> x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{(\frac{p}{2})^2-q}=\frac{3}{2}a\pm\sqrt{\frac{9a^2}{4}+1+a-2a^2}$

$=\frac{3}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2+a+1}$

$=\frac{3}{2}a\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4a+4}$ Binom, $(a+2)^2=a^2+4a+4$

$=\frac{3}{2}a\pm\frac{1}{2}(a+2)$

$=> x_1=\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}(a+2)=2a+1, \quad x_2=\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}(a+2)=a-1$

c.)

$\log_2(x)=4 \quad |2\uparrow$

$=> 2^{\log_2(x)}=2^4 \quad$ |umformen

$=> x=16$

d.)

$3^{x^2+1}=\left(\frac{1}{9}\right)^{ax} \quad$ | umformen mit $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

$=> 3^{x^2+1}=\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^{ax} \quad$ | umformen mit $(\frac{1}{3})^2=3^{-2}$

$=> 3^{x^2+1}=(3^{-2})^{ax} \quad$ | umformen mit $(a^b)^c=a^{b\cdot c}$

$=> 3^{x^2+1}=3^{-2ax} \quad |\log_3$

$=> x^2+1=-2ax \quad |+2ax$

$=> x^2+2ax+1=0$

pq-Formel anwenden mit p=2a, q =1

$=> x_{1/2}=-a\pm\sqrt{a^2-1}$

Lösungen gibt es fuer alle a, für die der Ausdruck unter der Wurzel nicht negativ ist, d.h. für alle

$a\in\ ]-\infty,-1]\ \cup\ [1,\infty[$

(Vereinigung zweier Intervalle: Das von -∞ bis -1 (incl. -1) mit dem von 1 bis ∞ (incl.1).)

Aufgabe 5

a.)

$$a^c\cdot a^d=\underbrace{\underbrace{a\cdot.....\cdot a}_{c\text{ mal}}\cdot\underbrace{a\cdot.....\cdot a}_{d\text{ mal}}}_{c+d\text{ mal}}$$
$$=a^{c+d}$$

b.)

$$(a^c)^d = \underbrace{\underbrace{a\cdot .....\cdot a}_{c\text{ mal}}\cdot\underbrace{a\cdot .....\cdot a}_{c\text{ mal}}\cdot .....\underbrace{a\cdot .....\cdot a}_{c\text{ mal}}}_{d\cdot c\text{ mal}}$$
$$= a^{d\cdot c} = a^{c\cdot d}$$

c.)

$$a^c\cdot b^c = \underbrace{a\cdot .....\cdot a}_{c\text{ mal}}\cdot\underbrace{b\cdot .....\cdot b}_{c\text{ mal}}$$
$$= \underbrace{(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdot ....\cdot(a\cdot b)}_{c\text{ mal}}$$
$$= (a\cdot b)^c$$

d.) Ist z.B. a eine Einheit in cm, $c = 1$ und $d = 2$, so würde hier eine Linie und ein Quadrat addiert - das wäre überhaupt nicht sinnvoll. Sind a, c und d gegebene Zahlen, also keine Variablen, so kann man $a^c + a^d$ natürlich ausrechnen und vielleicht umformen.

e.) $\log_b u\cdot v = \log_b u + \log_b v$, denn:

$\underbrace{b\cdot .....\cdot b}_{\log_b u\text{ mal}} = u$, und $\underbrace{b\cdot .....\cdot b}_{\log_b v\text{ mal}} = v$, also ist

$$u\cdot v = \underbrace{\underbrace{b\cdot .....\cdot b}_{\log_b u\text{ mal}}\cdot\underbrace{b\cdot .....\cdot b}_{\log_b v\text{ mal}}}_{\log_b u+\log_b v\text{ mal}}$$

Um $u\cdot v$ zu erhalten, muss man also b genau $\log_b u + \log_b v$ mal hinschreiben und multiplizieren.

f.) $\log_b w = -\log_b\left(\frac{1}{w}\right)$ erhält man durch Multiplikation der Definition für negative ganzzahlige Exponenten $\log_b\left(\frac{1}{w}\right) = -\log_b w$ mit -1.

Man kann sich alternativ auch überlegen: $\underbrace{w = b\cdot .....\cdot b}_{\log_b w\text{ mal}}$, somit ist

$$\tfrac{1}{w} = \frac{1}{\underbrace{b\cdot .....\cdot b}_{\log_b w\text{ mal}}} = \underbrace{b\cdot .....\cdot b}_{-\log_b w\text{ mal}}$$

Schön, dass beide Wege, es sich zu überlegen, zum selben Ziel führen :-)

g.) $\log_b\frac{u}{v} = \log_b u - \log_b v$ erhält man, indem man c.) und e.) auf $w = \frac{1}{v}$ anwendet.

h.) Wie oft muss man b hinschreiben und malnehmen, um b^x zu erhalten? x mal natürlich :-).

i.) $b^{\log_b x} = x$, denn

$$b^{\log_b x} = \underbrace{b\cdot .....\cdot b}_{\log_b x\text{ mal}}$$
$$= x$$

b wird genau so oft hingeschrieben und malgenommen, dass x herauskommt.

j.) Um sich $x \cdot \log_b u = \log_b u^x$ zu veranschaulichen, muss man sich überzeugen, dass man b genau $x \cdot \log_b u$ mal hinschreiben und multiplizieren muss, um u^x zu erhalten. Das sieht man wie folgt:

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{b\cdot .....\cdot b}_{x\cdot\log_b u\text{ mal}}\\
=&\underbrace{\overbrace{\underbrace{b\cdot .....\cdot b}_{\log_b u\text{ mal}}}^{=u}\cdot\overbrace{\underbrace{b\cdot .....\cdot b}_{\log_b u\text{ mal}}}^{=u}\cdots\overbrace{\underbrace{b\cdot .....\cdot b}_{\log_b u\text{ mal}}}^{=u}}_{x\text{ mal }\log_b u\text{mal}}\\
=&u^x.
\end{aligned}
$$

k.) Das ist trickreich: Die Basiswechselkonstante erhält man, indem man von der (offensichtlichen) Gleichung $b^{\log_b x} = x$ ausgeht, und beide Seiten zur Basis a logarithmiert:

$x = b^{\log_b x} \quad | \log_a$

$=> \log_a x = \log_a b^{\log_b x} \quad |$umformen nach Regel $y \cdot \log_a x = \log_a x^y$

$=> \log_a x = \log_b x \cdot \log_a b$

$\log_a b$ ist die Basiswechselkonstante. Logarithmen zu unterschiedlichen Basen unterscheiden sich nur durch eine Konstante, die von den beiden Basen abhängt - nicht vom Argument des Logarithmus.