# Übungsblatt 2 - Musterlösung

Technische Hochschule Mittelhessen, Mathematik 1 für EI, Prof. Dr. B. Just

## Aufgabe 1

a.) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt: $|2x+3| < 2$ ?

Um Betragsstriche wegzubekommen, macht man eine Fallunterscheidung.

Fall 1: Der Ausdruck unter dem Betrag ist größer gleich 0. Dann kann man die Betragsstriche einfach weglassen (muss sich aber in der weiteren Analyse daran erinnern, dass der Ausdruck größer gleich 0 sein musste).

Fall 2: Der Ausdruck unter dem Betrag ist kleiner als 0. Dann multiplizieren ihn die Betragssstriche mit -1. Man kann sie also weglassen, wenn man wieder mit -1 multipliziert (muss sich aber in der weiteren Analsyse daran erinnern, dass der Ausdruck kleiner als 0 war).

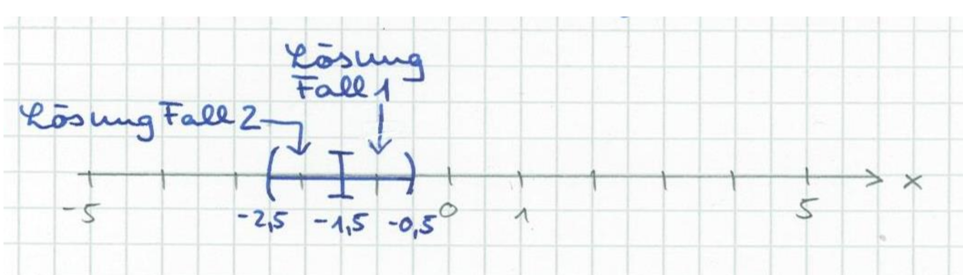
So machen wir es hier auch.

Fall 1: $2x+3 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -3 \Rightarrow x \geq -1,5$
In diesem Fall können also nur diejenigen $x$ mit $x \geq -1,5$ in der Lösungsmenge sein. Welche davon sind wirklich in der Lösungsmenge? Diejenigen mit
$2x+3 < 2 \qquad | -3$
$\Rightarrow 2x < 1 \qquad | : 2$
$\Rightarrow x < -0,5.$
Die Lösungsmenge aus diesem Fall ist das halboffene Intervall $[-1,5; -0,5)$.

Fall 2: $2x+3 < 0 \Rightarrow 2x < -3 \Rightarrow x < -1,5$
In diesem Fall können also nur diejenigen $x$ mit $x < -1,5$ in der Lösungsmenge sein. Welche davon sind wirklich in der Lösungsmenge? Diejenigen mit
$|2x+3| < 2$ |statt Betragsstrichen Ausdruck mit -1 multiplizieren
$-2x-3 < 2 \qquad | +2x-2$
$\Rightarrow -5 < 2x \qquad | : 2$
$\Rightarrow -2,5 < x.$
Die Lösungsmenge aus diesem Fall ist das offene Intervall $(-2,5; -1,5)$.

Gesamtlösung: Die Gesamtlösung ist die Vereinigungsmenge der Lösungen beider Fälle, also

$$[-1,5; -0,5) \cup (-2,5; -1,5) = (-2,5; -0,5).$$



b.) Bitte bestimmen Sie die $x \in \mathbb{R}$ mit:

$$\frac{2x-4}{x-1} \leqslant 5.$$

Die Lösungsmenge enthält nicht den Wert 1, da dort der Nenner Null ist. Wir würden die Ungleichung gerne mit $x-1$ malnehmen, um den Bruch auf der linken Seite wegzubekommen. Bei einer Ungleichung könnten wir das auch einfach machen. Bei einer Ungleichung jedoch dreht sich das $\leq$ in ein $\geq$, falls wir mit einem Wert malnehmen, der kleiner als 0 ist. Wir müssen daher die Fälle unterscheiden, ob $x-1$ kleiner oder größer als Null ist, die Lösungsmengen getrennt bestimmen, und am Ende als Gesamtlösungsmenge wieder die Vereinigungsmenge der Lösungen beider Fälle bilden. So wird's auch hier gemacht:

Fall 1: $x-1<0$, d.h. $x<1$. Dann gilt:

$\frac{2x-4}{x-1} \leqslant 5 \qquad | \cdot (x-1),$ Ungleichung dreht

$\Rightarrow 2x-4 \geq 5 \cdot (x-1) \qquad |$umformen

$\Rightarrow 2x-4 \geq 5x-5 \qquad | +5-2x$

$\Rightarrow -4+5 \geq 5x-2x \qquad |$umformen

$\Rightarrow 1 \geq 3x \qquad | :3$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \geq x$

Die Lösungsmenge aus diesem Fall sind also diejenigen $x \in \mathbb{R}$, die zugleich erfüllen $x<1$ und $\frac{1}{3} \geq x$, mit anderen Worten das offene Intervall $(-\infty; \frac{1}{3}]$.

Fall 2: $x-1>0$, d.h. $x>1$. Dann gilt:

$\frac{2x-4}{x-1} \leqslant 5 \qquad | \cdot (x-1),$ Ungleichung bleibt

$\Rightarrow 2x-4 \leq 5 \cdot (x-1) \qquad |$umformen

$\Rightarrow 2x-4 \leq 5x-5 \qquad | +5-2x$

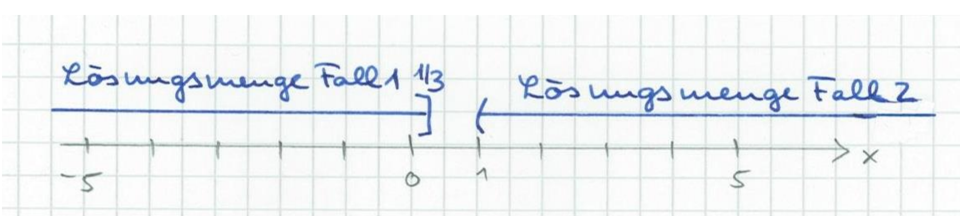
$\Rightarrow -4+5 \leq 5x-2x \qquad |$umformen

$\Rightarrow 1 \leq 3x \qquad | :3$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \leq x$

Die Lösungsmenge aus diesem Fall sind also diejenigen $x \in \mathbb{R}$, die zugleich erfüllen $x>1$ und $\frac{1}{3} \leq x$, mit anderen Worten das offene Intervall $(1; \infty)$.

Gesamtlösung: Die Gesamtlösung ist die Vereinigungsmenge beider Lösungsmengen, mit an deren Worten $(-\infty; \frac{1}{3}] \cup (1; \infty)$.



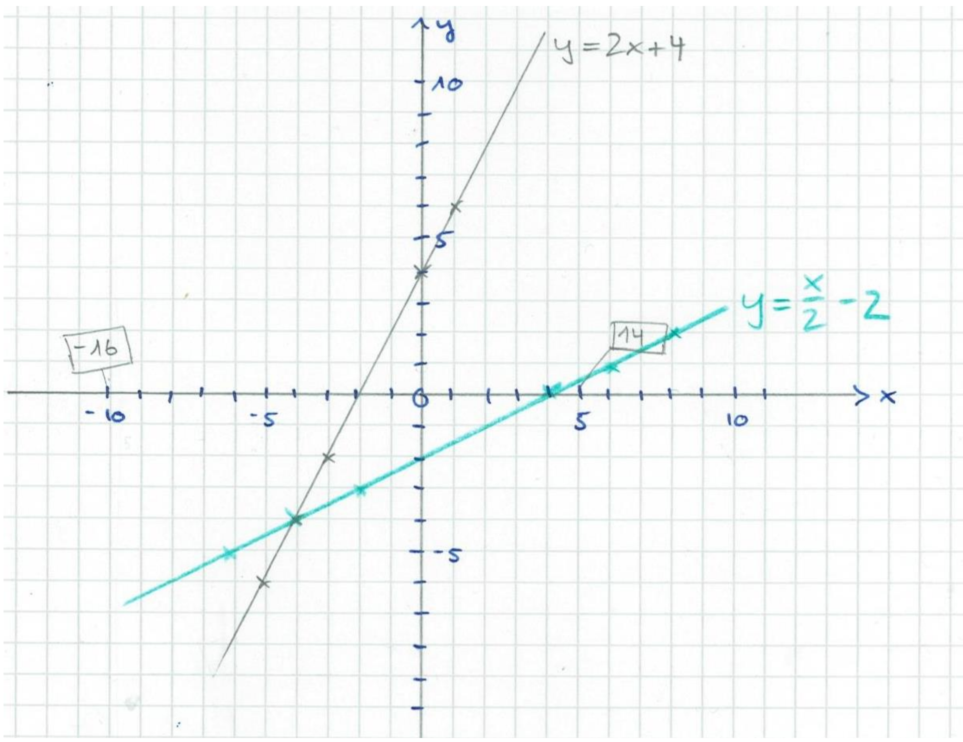
## Aufgabe 2

### Lösung Aufgabe 2a.

**Wertetabelle** (andere Werte sind möglich):

| $x$ | -10 | -5 | -4 | -3 | 0 | 1 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | -16 | -6 | -4 | -2 | 4 | 6 | 8 | 14 |

Funktionsgraph:




**Zuordnungsvorschrift der Umkehrfunktion mit Herleitung:**

$y = 2x + 4 \Rightarrow y - 4 = 2x \Rightarrow \frac{y-4}{2} = x.$

Formales Vertauschen von $x$ und $y$:

$y = \frac{x-4}{2} = \frac{x}{2} - 2.$

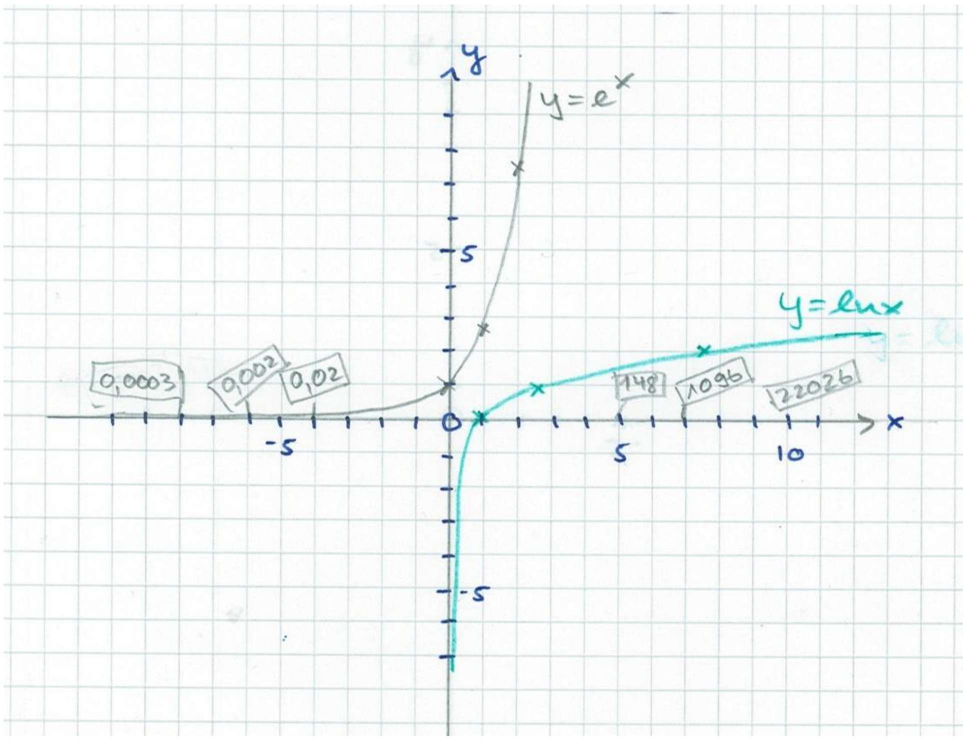
| **Funktions-eigenschaften** | **Funktion** | **Umkehrfunktion** |
|---|---|---|
| Definitionsbereich | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |
| Wertebereich | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |
| Nullstelle(n) | $x = -2$ | $x = 4$ |
| (streng) monoton wachsend / fallend ? | streng monoton wachsend | streng monoton wachsend |
| gerade / ungerade ? | nein | nein |

### Lösung Aufgabe 2b.

**Wertetabelle** (andere Werte sind möglich):

| $x$ | -8 | -6 | -4 | -2 | 0 | 1 | 2 | 5 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y \approx$ | 0,0003 | 0,002 | 0,02 | 0,14 | 1 | 2,7 | 7,4 | 148 | 1096 | 22026 |

Funktionsgraph:




**Zuordnungsvorschrift der Umkehrfunktion mit Herleitung:**

$y = e^x \Rightarrow \ln y = x$.

Formales Vertauschen von $x$ und $y$:

$y = \ln x$.

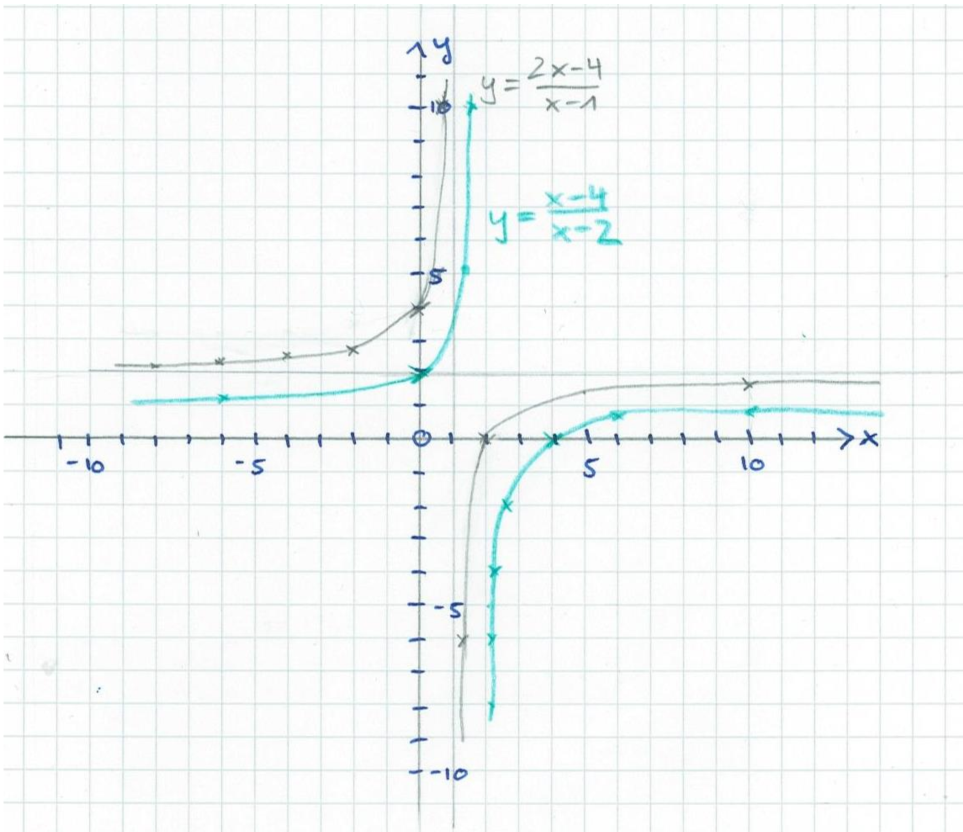
| **Funktions-eigenschaften** | **Funktion** | **Umkehrfunktion** |
|---|---|---|
| Definitionsbereich | $\mathbb{R}$ | $(0; \infty)$ |
| Wertebereich | $(0; \infty)$ | $\mathbb{R}$ |
| Nullstelle(n) | keine | $x = 1$ |
| (streng) monoton wachsend / fallend ? | streng monoton wachsend | streng monoton wachsend |
| gerade / ungerade ? | nein | nein |

**Lösung Aufgabe 2c.**

**Wertetabelle** (andere Werte sind möglich):

| $x$ | -8 | -6 | -4 | -2 | 0 | 1/2 | 3/4 | 1,25 | 2 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y \approx$ | 2,22 | 2,28 | 2,4 | 2,67 | 4 | 6 | 10 | -6 | 0 | 1,78 |

Funktionsgraph:




**Zuordnungsvorschrift der Umkehrfunktion mit Herleitung:**

$y = \frac{2x-4}{x-1}$, nur definiert für $x \neq 1$, das nehmen wir im Folgenden an.

$y = \frac{2x-4}{x-1}$

$\Rightarrow y \cdot (x-1) = 2x - 4$

$\Rightarrow yx - y = 2x - 4$

$\Rightarrow yx - 2x = y - 4$

$\Rightarrow x \cdot (y-2) = y - 4$

$\Rightarrow x = \frac{y-4}{y-2}$.

Formales Vertauschen von $x$ und $y$:

$y = \frac{x-4}{x-2}$.

| **Funktions-eigenschaften** | **Funktion** | **Umkehrfunktion** |
|---|---|---|
| Definitionsbereich | $\mathbb{R}$ ohne $x = 1$ | $\mathbb{R}$ ohne $x = 2$ |
| Wertebereich | $\mathbb{R}$ ohne $y = 2$ | $\mathbb{R}$ ohne $y = 1$ |
| Nullstelle(n) | $x = 2$ | $x = 4$ |
| (streng) monoton wachsend / fallend ? | nein (wegen $x = 1$) | nein |
| gerade / ungerade ? | nein | nein |

## Aufgabe 3

**Zuordnungsvorschrift der Umkehrfunktion mit Herleitung:**

$y = a \cdot x^3 + b$ wird aufgelöst nach $x$. Da dabei durch $a$ dividiert wird, müssen wir $a \neq 0$ voraussetzen.

(Wenn $a = 0$ ist, lautet die Funktion $y = b$, diese besitzt keine Umkehrfunktion).

Die Zuordnungsvorschrift für die Umkehrfunktion erhalten wir wie folgt:

$y = ax^3 + b \qquad | - b$

$\Rightarrow y - b = ax^3 \qquad | : a$, möglich weil $a \neq 0$

$\Rightarrow \frac{y-b}{a} = x^3 \qquad |\sqrt[3]{\phantom{x}}$, dritte Wurzel für negative Zahlen möglich

$\Rightarrow \left(\frac{y-b}{a}\right)^{1/3} = x$

Formales Vertauschen von $x$ und $y$:

$y = \left(\frac{x-b}{a}\right)^{1/3}$.

| **Funktions-eigenschaften** $a \neq 0$ | **Funktion** | **Umkehrfunktion** |
|---|---|---|
| Definitionsbereich | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |
| Wertebereich | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |
| Nullstelle(n) | $x = \left(-\frac{b}{a}\right)^{1/3}$ | $x = b$ |
| (streng) monoton wachsend/fallend | Für $a > 0:$<br>streng monoton wachsend<br>Für $a < 0:$<br>streng monoton fallend | Für $a > 0:$<br>streng monoton wachsend<br>Für $a < 0:$<br>streng monoton fallend |
| gerade / ungerade ? | nein, falls $b \neq 0$<br>ungerade, falls $b = 0$ | nein, , falls $b \neq 0$<br>ungerade, falls $b = 0$ |

Die Nullstelle der Funktion wurde wie folgt berechnet:

$$ax^3 + b = 0 \;\Rightarrow\; ax^3 = -b \;\Rightarrow\; x = \left(-\frac{b}{a}\right)^{1/3} \text{ für } a \neq 0.$$

Die Nullstelle der Umkehrfunktion wurde wie folgt berechnet:

$$\sqrt[3]{\frac{x-b}{a}} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{x-b}{a} = 0 \;\Rightarrow\; x - b = 0 \;\Rightarrow\; x = b\ .$$