Übungsblatt 3 - Musterlösung

Technische Hochschule Mittelhessen, Mathematik 1 für EI, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

Bitte vervollständigen Sie die Tabelle mit verschiedenen Winkeln in grad oder im Bogenmass (als Zahl, dezimales oder rationales Vielfaches von pi). Die erste Zeile ist eine vollständige Zeile als Beispiel.

grad	**rad (als Zahl)**	**rad (als dezimales Vielfaches von pi)**	**rad (als rationales Vielfaches von pi)**
-30^o	$-0,524$	$-0,16667\pi$	$-\frac{1}{6}\pi$
-180^o	$-3,1415$	$-\pi$	$-\pi$
$-135°$	$-2,356$	$-0,75\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$
$-45°$	$-0,785$	$-0,25\pi$	$-\frac{1}{4}\pi$
-30^o	$-0,524$	$-0,667\pi$	$-\frac{1}{6}\pi$
$0°$	$0,000$	$0,000$	0
10^o	$0,175$	$0,0556\pi$	$\frac{1}{18}\pi$
$20°$	$0,35$	$0,1111\pi$	$\frac{1}{9}\pi$
$45°$	$0,785$	$0,25\pi$	$\frac{1}{4}\pi$
60^o	$1,047$	$0,3333\pi$	$\frac{1}{3}\pi$
70^o	$1,222$	$0,3889\pi$	$\frac{7}{18}\pi$
90^o	$1,571$	$0,5\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$120°$	$2,094$	$0,6667\pi$	$\frac{2}{3}\pi$
$135°$	$2,356$	$0,75\pi$	$\frac{3}{4}\pi$
160^o	$2,793$	$0,8889\pi$	$\frac{8}{9}\pi$
$180°$	$3,1415...$	π	π

Aufgabe 2

a.)

y_1 :

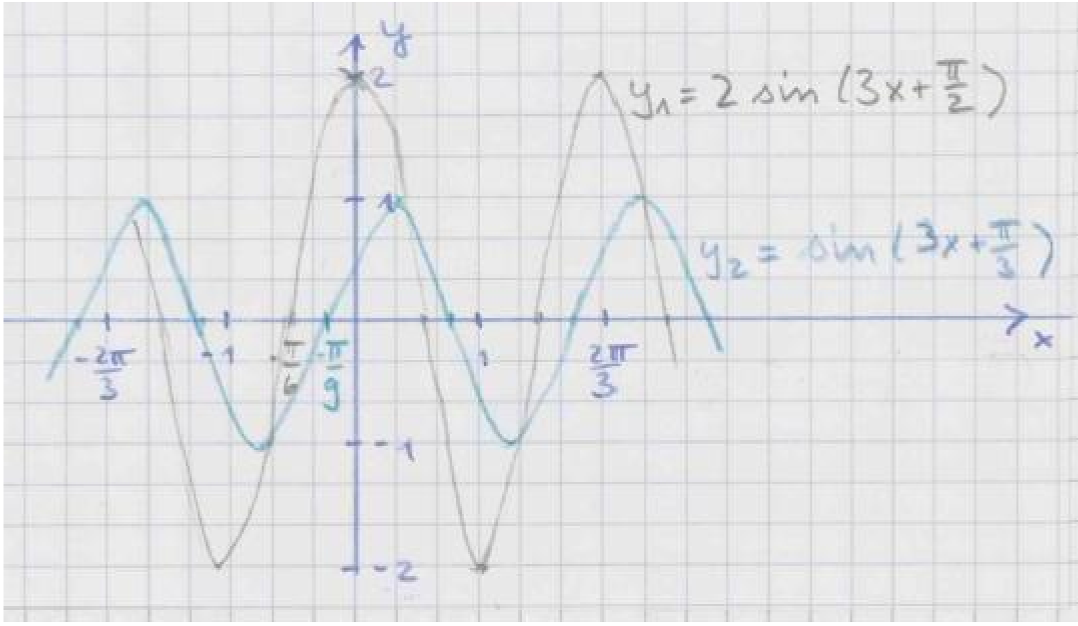
Periode $= \frac{2\pi}{3}$, Amplitude $= 2$,

Nullstelle bei $3x + \frac{\pi}{2} = 0 => 3x = -\frac{\pi}{2} => x = -\frac{\pi}{6}$

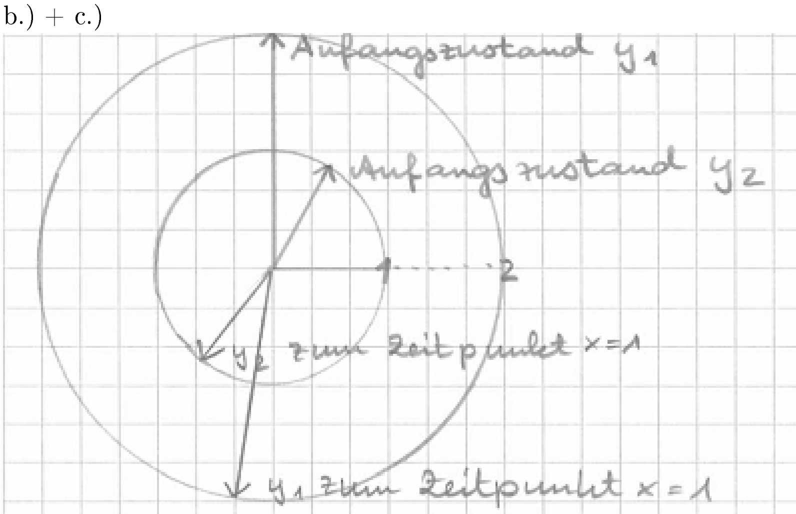
y_2 :

Periode $= \frac{2\pi}{3}$, Amplitude $= 1$

Nullstelle bei $3x + \frac{\pi}{3} = 0 => 3x = -\frac{\pi}{3} => x = -\frac{\pi}{9}$



b.) + c.)



Anfangszustand y_1: Winkel$\frac{\pi}{2}$, Länge 2

Anfangszustand y_2: Winkel $\frac{\pi}{3}$, Länge 1

y_1 zum Zeitpunkt x =1 : Länge 2 (unverändert)

Winkel $= \frac{\pi}{2} + 3 \approx 4,57 \approx 261^o$

y_2 zum Zeitpunkt x =1 : Länge 1 (unverändert)

Winkel $= \frac{\pi}{3} + 3 \approx 4,05 \approx 232^o$

d.)

Der Winkel zwischen den Zeigern zu y_1 und y_2 bleibt konstant,
da beide Zeiger mit derselben Geschwindigkeit kreisen (identische Frequenz).

Aufgabe 3

$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

i.)

Definitionsbereich von $\cot(x)$:

$\{x \in \mathbb{R} : \sin(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$

Andere Schreibweise: $\{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}\}$.

ii.)

Für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist $\cot(x + k \cdot \pi) = \frac{\cos(x+k\pi)}{\sin(x+k\pi)} = \frac{1}{\tan(x)}$.

Da $\tan(x)$ periodisch mit Periode π ist, ist auch $\cot(x)$ periodisch mit Periode π.

iii.) Verhalten im Intervall $(0, \pi)$:

$\cot(\frac{\pi}{2}) = 0, \;\; \cot(\frac{\pi}{4}) = 1, \;\; \cot(\frac{3}{4}\pi) = -1.$

Dazwischen: $\cot(\frac{3}{8}\pi) \approx 0,41, \;\; \cot(\frac{5}{8}\pi) \approx -0,41$

iv.)

Wie verhält sich $\cot(x)$ für x $>$ 0 aber klein?

$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$, Zähler und Nenner > 0

Zähler geht für $x = \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, ...$ gegen 1,

Nenner gegen 0, also Bruch gegen $+\infty$

Wie verhält sich $\cot(\pi - x)$ für x>0, aber klein?

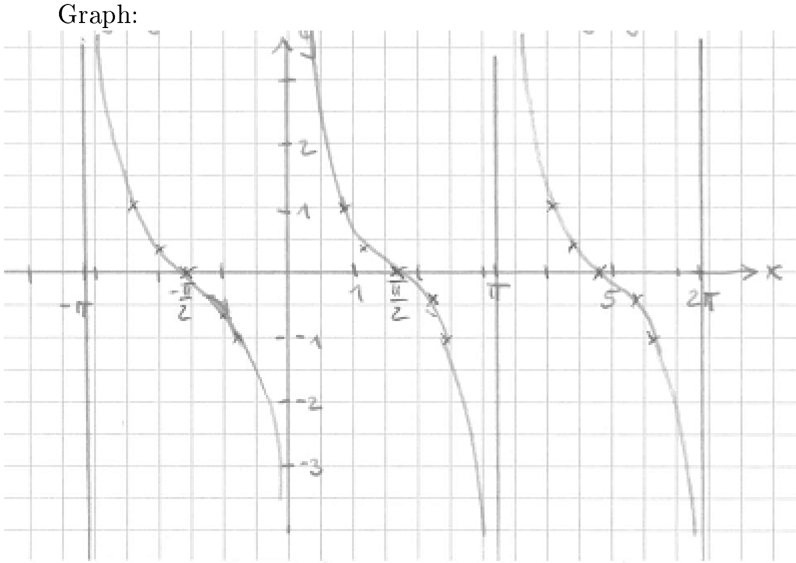
$\cot(\pi - x) = \frac{\cos(\pi-x)}{\sin(\pi-x)}$ Zähler $<$ 0, Nenner >0.

Zähler geht für $x = \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, ..$ gegen -1,

Nenner gegen 0, also Bruch gegen $-\infty$

v.)

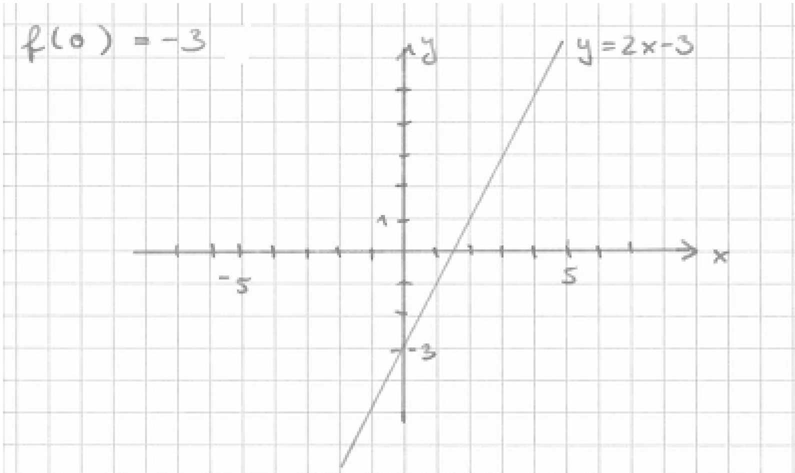
Graph:



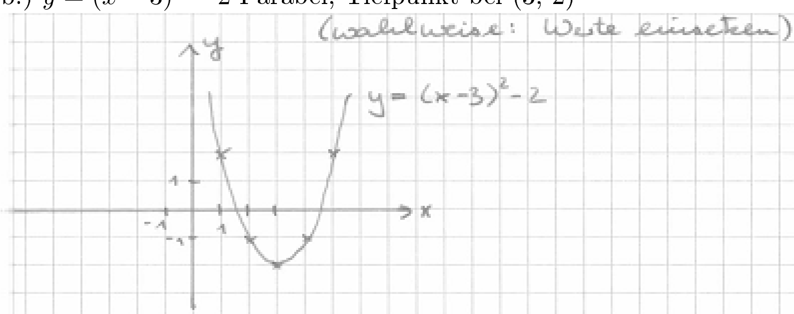
Aufgabe 4

a.) $y = 2x - 3$

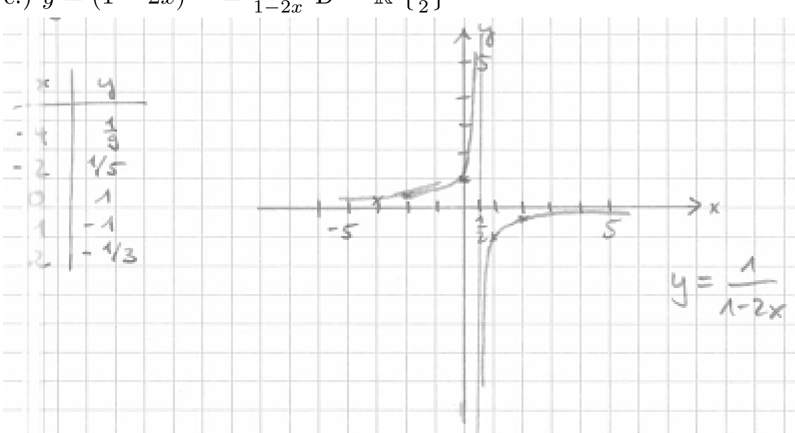
Gerade, Steigung 2 (1 Schritt nach rechts $\widehat{=}$2 Schritte nach oben),



b.) $y = (x-3)^2 - 2$ Parabel, Tiefpunkt bei (3;-2)

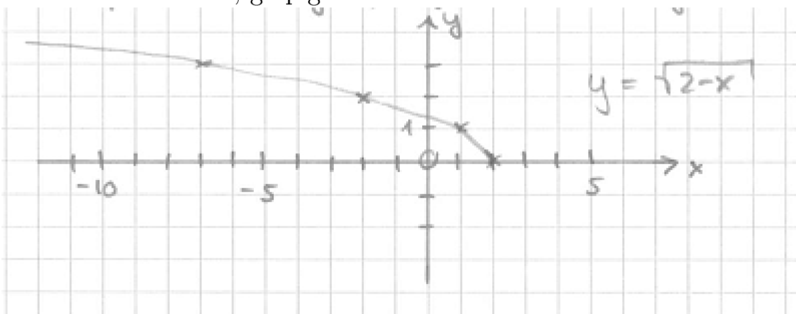


c.) $y = (1-2x)^{-1} = \frac{1}{1-2x}$ D = $\mathbb{R}$ $\{\frac{1}{2}\}$



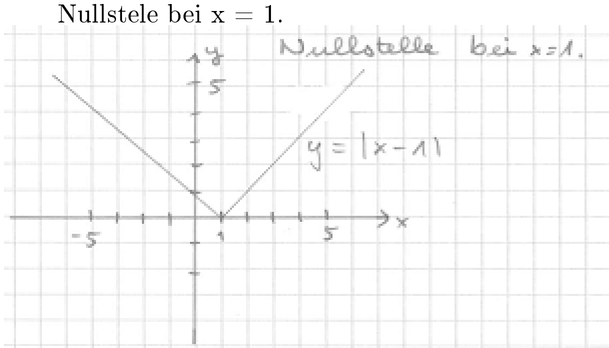
d.) $y = \sqrt{2-x}$ D $= \{\ x \in \mathbb{R} : 2 - x \geqslant 0\} = (-\inf, 2)$

Wurzelfunktion, gespigelt an der Geraden x =2.



e.) $y = |x - 1|$ Betragsfunktion (ein Dreieck :))

Nullstele bei x = 1.



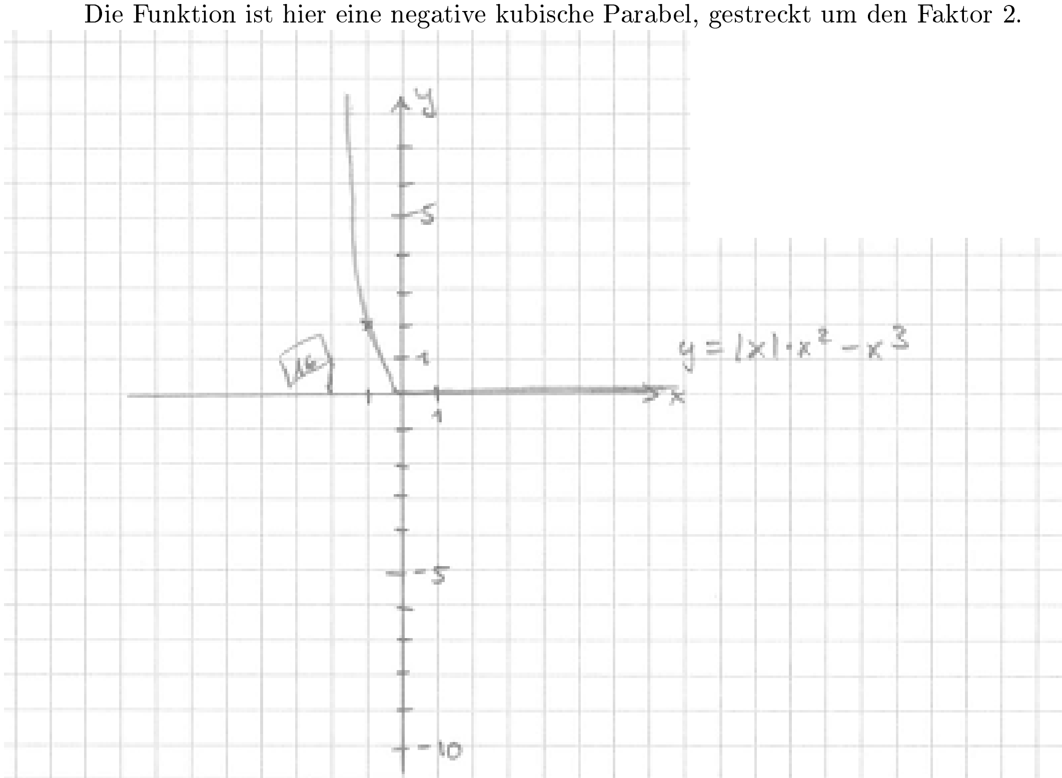
f.) $y = |x| \cdot x^2 - x^3$

Fall $x \geqslant 0$: Hier ist $|x| = x$, also $y = x^3 - x^3 = 0$

Die Funktion ist hier konstant 0.

Fall $x < 0$: Hier ist $|x| = -x$, also $y = -x^3 - x^3 = -2x^3$

Die Funktion ist hier eine negative kubische Parabel, gestreckt um den Faktor 2.



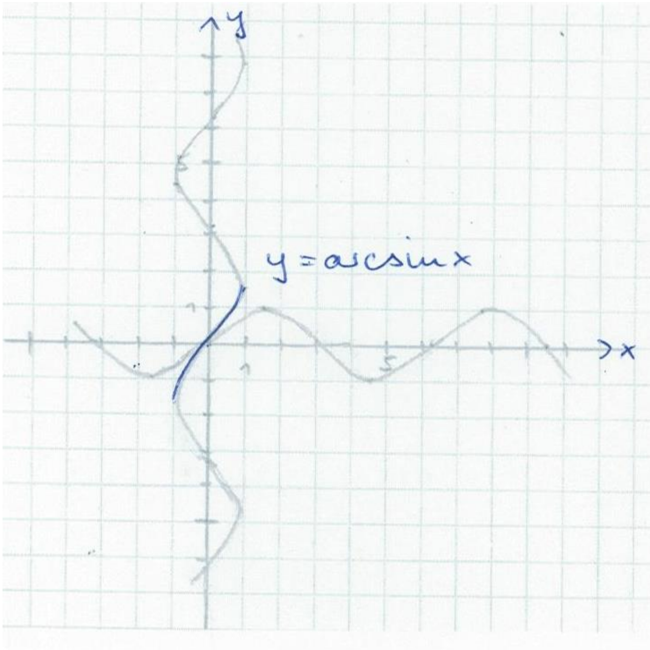
Aufgabe 5

Siehe nächste beiden Seiten

Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen

Technische Hochschule Mittelhessen, Mathematik 1 für EI, Prof. Dr. B. Just

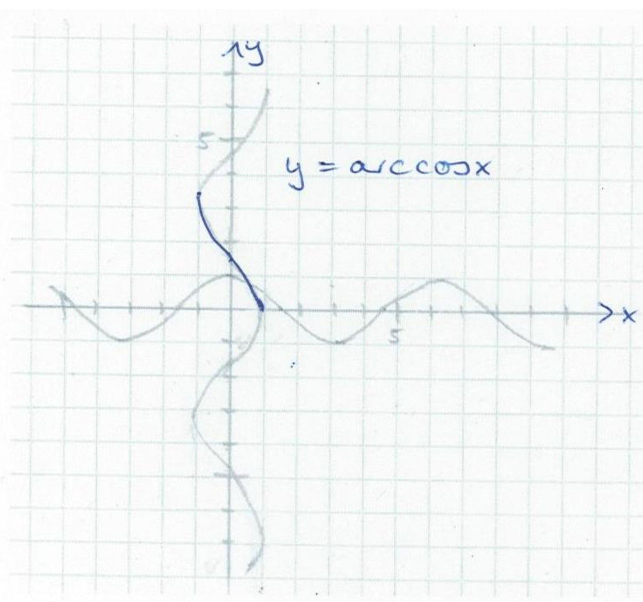
Sinus



Sinusfunktion:
$\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$
liefert zu einem Winkel den Sinus.

Umkehrfunktion arcsin:
$\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$
liefert zu einer Zahl in $[-1,1]$
den eindeutigen
Winkel in $[-\pi/2, \pi/2]$
der als Sinus die Zahl hat
(dessen Sinus die Zahl ist).

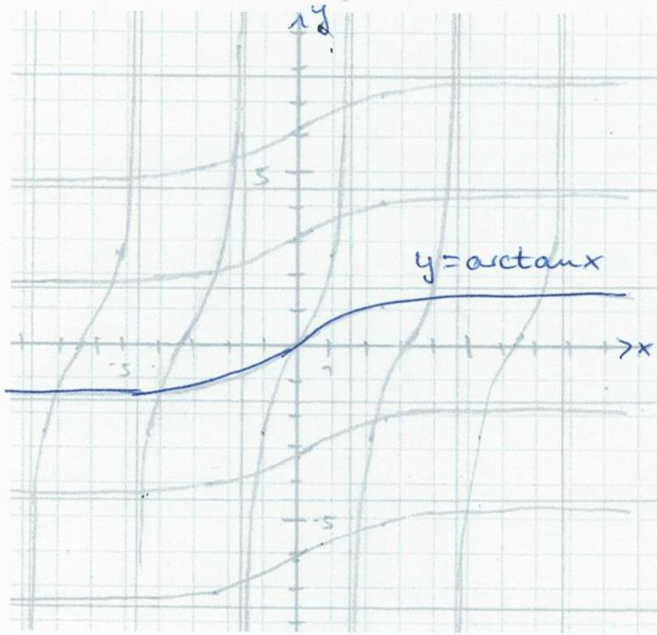
Cosinus



Cosinusfunktion:
$\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$
liefert zu einem Winkel den Cosinus.

Umkehrfunktion arccos:
$\arccos : [-1,1] \to [0, \pi]$
liefert zu einer Zahl in $[-1,1]$
den eindeutigen
Winkel in $[0, \pi]$
der als Cosinus die Zahl hat
(dessen Cosinus die Zahl ist).

Tangens

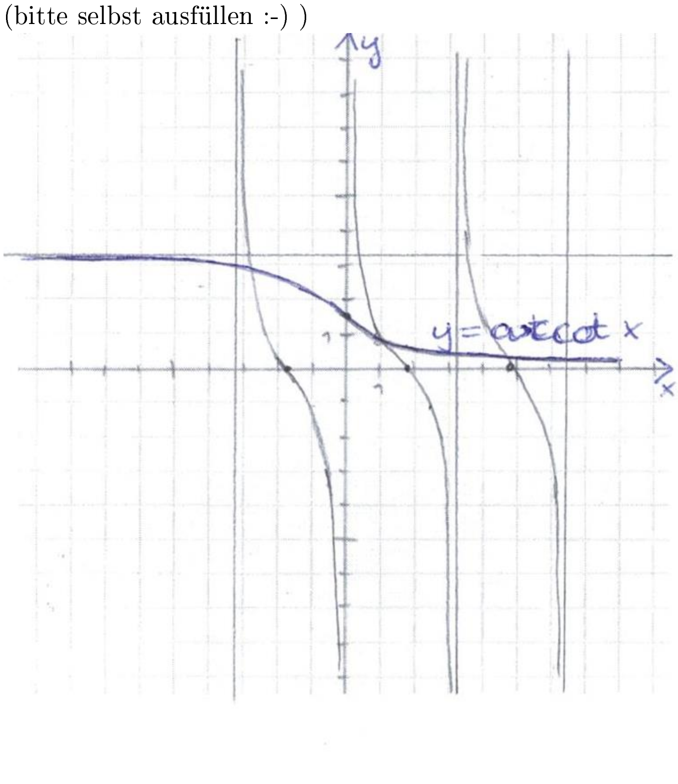


Tangensfunktion:
$\tan : \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$
liefert zu einem Winkel den Tangens.

Umkehrfunktion arctan:
arctan : $\mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$
liefert zu einer Zahl in $\mathbb{R}$
den eindeutigen
Winkel in $(-\pi/2, \pi/2)$
der als Tangens die Zahl hat
(dessen Tangens die Zahl ist).

Cotangens

(bitte selbst ausfüllen :-))



Cotangensfunktion:
$\cot : \mathbb{R} \setminus \{(k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$
liefert zu einem Winkel den Cotangens.

Umkehrfunktion arccot:
arccot: $\mathbb{R} \to (0; \pi)$
liefert zu einer Zahl
den eindeutigen
Winkel in $(0; \pi)$
der als Cotangens die Zahl hat
(dessen Cotangens die Zahl ist).