Übungsblatt 5 - Musterlösungen

Technische Hochschule Mittelhessen, Mathematik 1 für EI, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

a.) Lösungen sind:

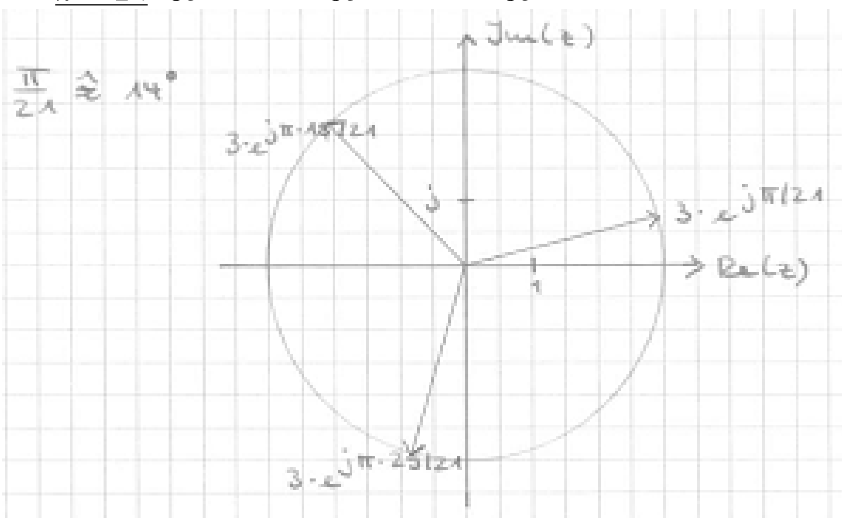
$$\sqrt[3]{27} \cdot e^{j(\frac{\pi}{7}+2k\pi)/3} \text{ für } k = 0, 1, 2.$$

Wir erhalten:

$\underline{k = 0:}$ $3 \cdot e^{\frac{j\pi}{21}}$

$\underline{k = 1:}$ $3 \cdot e^{\frac{j(\frac{\pi}{7}+2\pi)}{3}} = 3e^{j(\frac{\pi}{21}+\frac{2\pi}{3})} = 3e^{j\pi\cdot\frac{15}{21}}$

$\underline{k = 2:}$ $3e^{\frac{j(\frac{\pi}{7}+4\pi)}{3}} = 3e^{j(\frac{\pi}{21}+\frac{4}{3}\pi)} = 3e^{j\pi\cdot\frac{29}{21}}$



b.) $z^2 + 2z + 5 = 0$. pq -Formel mit p =2, q =5

$=> z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm \sqrt{-4}$

$=> z_1 = -1 + 2j, \quad z_2 = -1 - 2j$

c.) $2x^2 + 6x - 2jx - 6j = 0 \qquad |:2$

$=> x^2 + 3x - jx - 3j = 0$

$=> x^2 + (3-j) \cdot x - 3j = 0$

pq-Formel mit p =3-j, q = -3j

$=> x_{1/2} = -\frac{3-j}{2} \pm \sqrt{(\frac{3-j}{2})^2 + 3j}$

$= -\frac{3-j}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(3-j)^2 + 12j}$

$= -\frac{3-j}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{9 - 6j - 1 + 12j}$

$= -\frac{3}{2} + \frac{j}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{9 + 6j - 1}$

$= -\frac{3}{2} + \frac{j}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(3+j)^2} = -\frac{3}{2} + \frac{j}{2} \pm \frac{1}{2}(3+j)$

$=> x_1 = -\frac{3}{2} + \frac{j}{2} + \frac{3}{2} + \frac{j}{2} = j$

$x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{j}{2} - \frac{3}{2} - \frac{j}{2} = -3$

Aufgabe 2

a.) $(2,5,4)+(-2,1,8)=(0,6,12)$

b.) $|(4,3,2,-1,-5)| = \sqrt{4^2+3^2+2^2+(-1)^2+(-5)^2}$
$\sqrt{16+9+4+1+25} = \sqrt{55} \approx 7,4$

c.) $(1,3,4,7,5)\cdot(2,4,-3,-2,1) = 1\cdot 2+3\cdot 4+4\cdot(-3)+7\cdot(-2)+5\cdot(-1)$
$= 2+12-12-14-5=-17$

d.) $|(3,2,1)-(1,2,3)| = |(2,0,2)| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \approx 2,8$

e.) $(a,b,c)+(a,c,b) = (2a, b+c, b+c)$

f.) $(a,b,c)-(a,c,b) = (0, b-c, c-b)$

g.) $(a,b,c)-2\cdot(a,c,b) = (a,b,c)-(2a,2c,2b) = (-a, b-2c, c-2b)$

h.) $(a,-b,c,-d)\cdot(-c,-b,a,\frac{1}{d}) = -ac+b^2+ac-\frac{d}{d} = b^2-1$

Aufgabe 3

Den Einheitsvektor in Richtung x erhält man, indem man den gegebenen Vektor durch seine Norm teilt.
Deshalb sind die gesuchten Vektoren:

a.)
$$\frac{(2,-4,2)}{|2,-4,2|} = \frac{(2,-4,2)}{\sqrt{4+16+4}} = \frac{(2,-4,2)}{\sqrt{24}} = (\frac{2}{\sqrt{24}}, -\frac{4}{\sqrt{24}}, \frac{2}{\sqrt{24}})$$

b.)
$$\begin{aligned} |(3,1,4,5,1,8,2,1)| &= \sqrt{3^2+1^2+4^2+5^2+1^2+8^2+2^2+1^2} \\ &= \sqrt{9+1+16+25+1+64+4+1} = \sqrt{121} = 11 \end{aligned}$$

=> der Vektor ist $(\frac{3}{11}, \frac{1}{11}, \frac{4}{11}, \frac{5}{11}, \frac{1}{11}, \frac{8}{11}, \frac{2}{11}, \frac{1}{11})$.

Aufgabe 4

a.) Vektoraddition: Vektor + Vektor = Vektor.
Bsp : $(1,2,3)+(4,4,5)=(5,6,8)$
(Es gibt natürlich beliebig viele andere Beispiele).

b.) Skalarmultiplikation: Skalar · Vektor = Vektor.
Bsp: $\frac{1}{2}\cdot(1,2,3) = (0,5;\ 1;\ 1,5)$.

c.) Skalarprodukt: Vektor · Vektor = Skalar.
Bsp: $(1,2,3)\cdot(4,4,5) = 1\cdot 4+2\cdot 4+3\cdot 5 = 27$

Aufgabe 5

a.) $x = (2, 1, 3), y = (8, -16, 14)$

Die orthogonale Zerlegung erfüllt:

$y^{\text{par}} = \frac{x \cdot y}{|x|^2} \cdot x,$

$y^{\text{senk}} = y - y^{\text{par}}.$

Nebenrechnung:

$x \cdot y = 16 - 16 + 42 = 42, \quad |x|^2 = 2^2 + 1^2 + 3^2 = 4 + 1 + 9 = 14.$

Somit:

$y^{\text{par}} = \frac{x \cdot y}{|x|^2} \cdot x = \frac{42}{14} \cdot x = 3x = (6, 3, 9)$

$y^{\text{senk}} = y - y^{\text{par}} = (8, -16, 14) - (6, 3, 9) = (2, -19, 5)$

Probe, ob y^{senk} wirklich senkrecht auf x steht:

$x \cdot y^{\text{senk}} = (2, 1, 3) \cdot (2, -19, 5) = 4 - 19 + 15 = 0$, also senkrecht.

Probe, ob $y^{\text{senk}} + y^{\text{par}} = y$:

$y^{\text{senk}} + y^{\text{par}} = (2,\ -19,\ 5) + (6, 3, 9) = (8,\ -16,\ 14) = y.$

b.)

Der Winkel α zwischen x und y erfüllt

$\alpha = \arccos \frac{x \cdot y}{|x| \cdot |y|}.$

Nebenrechnung:

$x \cdot y = 42, \quad |x| = \sqrt{14}$ (vgl. Teilaufgabe a.)), $\quad |y| = \sqrt{8^2 + (-16)^2 + (14)^2} = \sqrt{516}$

Somit:

$$\alpha = \arccos \frac{42}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{516}} = \arccos \frac{42}{\sqrt{7224}} \approx \arccos 0,49415$$

$\approx 1,054$ (im Bogenmass)

$\approx 60,4^o$ (im Gradmass).