Übungsblatt 7 - Musterlösungen

Technische Hochschule Mittelhessen, Mathematik 1 für EI, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

(Es wird $ad - bc \neq 0$ vorausgesetzt, sonst ist die Aufgabe nicht lösbar.)

Es ist $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Nimmt man beide Seiten der gegebenen Gleichung $A \cdot X = B$ von links mit A^{-1} mal, so erhält man

$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$, was wegen $A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bedeutet $X = A^{-1} \cdot B$.

Ausmultiplizieren liefert $X = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d-2b & 2d-b \\ -c+2a & -2c+a \end{pmatrix}$.

Eine andere Schreibweise für X ist

$$X = \begin{pmatrix} \frac{d-2b}{ad-bc} & \frac{2d-b}{ad-bc} \\ \\ \frac{-c+2a}{ad-bc} & \frac{-2c+a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Mit der Merkregel vom $\mathbb{R}^3$-Sarrus erhält über die Hilfsmatrix $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & \alpha^2 & \alpha & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & \alpha & 1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$

$\det(B) = \alpha \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) + \alpha^2 \cdot 0 \cdot \alpha - \alpha^2 \cdot (-1) \cdot (-1) - \alpha \cdot 1 \cdot \alpha - 1 \cdot 0 \cdot 1 = -2\alpha^2 - \alpha - 1.$

Damit $\det(b) = 0$ gilt, muss also gelten $-2\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$, d.h. $\alpha^2 + 0,5\alpha + 0,5 = 0$.

Anwenden der pq-Formel mit $p = 0,5$ und $q = 0,5$ liefert

$\alpha_{1,2} = -0,25 \pm \sqrt{\frac{1}{16} - 0,5} = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4} \cdot \sqrt{-7}$.

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Determinante niemals Null. Ist $\alpha \in \mathbb{C}$ erlaubt, so ist die Determinante Null bei $\alpha_{1,2} = 0,25 \cdot (-1 \pm j \cdot \sqrt{7})$.

Aufgabe 3

Es seien $S = (s_1, s_2, s_3)$ und $T = (t_1, t_2, t_3)$.

i.) Zunächst wird gezeigt, dass $S \times T$ senkrecht auf S steht, also, dass das Skalarprodukt von $S \times T$ mit S Null ergibt:

$$\begin{aligned}(S \times T) \cdot S &= s_1 s_2 t_3 - s_1 s_3 t_2 \\ &+ s_2 s_3 t_1 - s_2 s_1 t_3 \\ &+ s_3 s_1 t_2 - s_3 s_2 t_1 \\ &= 0\end{aligned}$$

Nun wird gezeigt, dass $S \times T$ senkrecht auf T steht, also, dass das Skalarprodukt von $S \times T$ mit T Null ergibt:

$$\begin{aligned}(S \times T) \cdot T &= t_1 s_2 t_3 - t_1 s_3 t_2 \\ &+ t_2 s_3 t_1 - t_2 s_1 t_3 \\ &+ t_3 s_1 t_2 - t_3 s_2 t_1 \\ &= 0\end{aligned}$$

Ist nun v ein Element der von S und T aufgespannten Ebene, also $v = \lambda_1 \cdot S + \lambda_2 \cdot T$ für geeignete $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, so ist das Skalarprodukt von V mit $S \times T$ Null, denn man rechnet unter Benutzung der Eigenschaften des Skalarproduktes nach:

$$\begin{aligned}(S \times T) \cdot v &= (S \times T) \cdot (\lambda_1 \cdot S + \lambda_2 \cdot T) \\ &= (S \times T) \cdot (\lambda_1 \cdot S) + (S \times T) \cdot (\lambda_2 \cdot T) \\ &= \lambda_1 \cdot (S \times T) \cdot S + \lambda_2 \cdot (S \times T) \cdot T \\ &= \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_1 \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

ii.) Wegen $S = \lambda \cdot T$ und $S = (s_1, s_2, s_3)$ ist $T = (\lambda s_1, \lambda s_2, \lambda s_3)$. Also ist:

$$(S \times T) = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda s_1 \\ \lambda s_2 \\ \lambda s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_2 \cdot \lambda s_3 - \lambda s_2 \cdot s_3 \\ s_1 \cdot \lambda s_3 - \lambda s_1 \cdot s_3 \\ s_1 \cdot \lambda s_2 - \lambda s_1 \cdot s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Vektorprodukt $S \times T$ ist also der Nullvektor, somit ist $|S \times T| = 0$.

Aufgabe 4

a.) y und x sind linear unabhängig, da sie keine Vielfachen voneinander sind. Denn wäre
$x = \lambda y$, so wäre $1 = -2\lambda$ (wegen der ersten Komponente), und zugleich $2 = 6\lambda$ (wegen der zweiten Komponente), also wäre λ zugleich $-1/2$ und $2/3$, was nicht möglich ist.

b.) x, y und z sind genau dann linear abhängig, wenn die Determinante der Matrix, die ihre Komponenten als Spalten enthält, Null ist. (Äquivalent dazu ist es, dass die Determinante der Matrix, die die Vektoren als Spalten enthält, 0 ist).

Nach $\mathbb{R}^3$-Sarrus ist

$$\det(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 2 & 6 & -6 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = 1\cdot 6\cdot 5 + (-2)\dot{(}-6)\cdot 3 + 7\cdot 2\cdot 2 - 7\cdot 6\cdot 3 - 1\cdot(-6)\cdot 2 - (-2)\cdot 2\cdot 5 = 0.$$

Also sind x, y und z linear abhängig, liegen in einer Ebene.

Aufgabe 5

a.) Eine parametrisierte Form erhält man z.B., indem man P_1 als Stützvektor und $P_2 - P_1$ als Richtungsvektor einsetzt:

$$g_1 = (2,3,4) + \lambda \cdot ((-2,2,2) - (2,3,4))$$
$$g_1 = (2,3,4) + \lambda \cdot (-4,-1,-2)$$

b.) Zunächst werden drei Punkte auf e_1 berechnet:

- Punkt a: Setzte $x_a = 0$, $y_a = 0$
  $-2\ z_a = 1$
  $z_a = -0.5$
  $=>$ a= (0; 0; -0.5)
- Punkt b: Setzte $x_b = 0$, $y_b = 1$
  $3-2\ z_b = 1$
  $z_b = 1$
  $=>$ b= (0; 1; 1)
- Punkt c: Setzte $x_c = 1$, $y_c = 0$
  $2-2\ z_c = 1$
  $z_c = 0.5$
  $=>$ c = (1; 0; 0.5)
- Eine parametrisierte Form erhält man z.B., indem man b als Stützvektor und $a - b$ sowie $c - b$ als Richtungsvektoren nimmt:
  $e_1 = (0;1;1) + \lambda \cdot ((0;0;\frac{1}{2}) - (0;1;1)) + \mu \cdot ((1;0;\frac{1}{2}) - (0;1;1))$
  $e_1 = (0;1;1) + \lambda \cdot (0;-1;\frac{-3}{2}) + \mu \cdot (1;-1;\frac{-1}{2})$

c.) Der Normalenvektor der Ebene ist

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das Skalarprodukt zwischen Stützvektor und Normalenvektor ist $(3;3;3)\cdot(-1;-1;1) = -3$
Die Koordinatenform ist also
e_2: $-x - y + z = -3$

d.) p_1 liegt auf e_1, wenn die Koordinaten von p_1 die Koordinatengleichung von e_1 erfüllen, d.h., wenn gilt:
$2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 =?1$
Wegen $5 \neq 1$ gilt diese Gleichung nicht, also liegt p_1 nicht auf e_1.

e.) (Für die Darstellung von e_2 in Normalenform vgl Aufgabe c.)) Man bringt zunächst das LGS aus den beiden Normalenformen auf Zeilenstufenform:

x	y	z			
2	3	-2	=	1	
-1	-1	1	=	-3	addiere die Hälfte der ersten Zeile zu Zeile 2
2	3	-2	=	1	
0	0.5	0	=	-2.5	

Rückwärts Einsetzen liefert die Schnittgerade $(8,-5,0) + \lambda \cdot (1,0,1)$.
Alternatives Vorgehen: Man bestimmt den Richtungsvektor der Geraden, der senkrecht auf den beiden Normalenvektoren der Ebenen steht:
$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
Ein Stützvektor (x, y, z) der Schnittgeraden liegt auf beiden Ebenen. Er erfüllt also das LGS der beiden Darstellungen in Normalform. Als Stützvektor kann z.B. $(8. - 5, 0)$ gewählt werden.

f.) Für e_1 wird die Parameterdarstellung aus b.) genutzt:
$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$
Außerdem der Normalenvektor (2, 3, -2) von e_1. Der Abstandsvektor von p_2 und e_1 ist der zu $(2, 3, -2)$ parallele Anteil von $p_2 - (0, 1, 1)$, also von $(-2, 2, 2) - (0, 1, 1) = (-2, 1, 1)$.
Orthogonale Zerlegung von $y = (-2, 1, 1)$ längs $x = (2, 3, -2)$ liefert:

$$y^{par} = \frac{x \cdot y}{|x|^2} \cdot x = \frac{(2,3,-2)\cdot(-2,1,1)}{4+9+4} \cdot (2,3,-2) = \frac{-3}{17} \cdot (2,3,-2)$$

Die Länge von y^{par} ist der gesuchte Abstand zwischen Punkt und Ebene:
$|y^{par}| = \frac{3}{17} \cdot |(2,3,-2)| = \frac{3}{17} \cdot \sqrt{17} = \frac{3}{\sqrt{17}}$

g.) Nach a.) ist Gerade $g_1 : (2, 3, 4) + \lambda(-4, -1, -2)$ und Gerade $g_2 : (3, 3, 3) + \lambda(1, 0, 1)$.
Der Abstand ist daher

$$\frac{|((2,3,4)-(3,3,3))\cdot((-4,-1,-2)\times(1,0,1))|}{|(-4,-1,-2)\times(1,0,1)|} = \frac{|(-1,0,1)\cdot(-1,2,1)|}{|(-1,2,1)|} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

weil $\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 1 - 0 \cdot (-2) \\ (-2) \cdot 1 - 1 \cdot (-4) \\ (-4) \cdot 0 - 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

h.) Den Schnittpunkt einer Gerade (in Parameterform) mit einer Ebene (in Normal- bzw. Koordinatenform) erhält man, indem man die Geradengleichung in die Koordinatenform einsetzt und das λ berechnet. Hier ergibt sich:

Gerade $(2,3,4) + \lambda \cdot (-4,-1,-2)$ wegen Teil a. der Aufgabe

Ebene: $-x - y + z = -3$ wegen Teil c. der Aufgabe.

Einsetzen: Der Schnittpunkt (x, y, z) erfüllt mit $x = 2 - 4\lambda$ und $y = 3 - \lambda$ und $z = 4 - 2\lambda$ und der Ebenengleichung $-x - y + z = -3$, also

$-2 + 4\lambda - 3 + \lambda + 4 - 2\lambda = -3$

also $\lambda = -2/3$.

Also gibt es einen Schnittpunkt, und er ist $(2,3,4) - \frac{2}{3} \cdot (-4,-1,-2) = \frac{1}{3}(14, 11, 16)$.

i.) Der Winkel α zwischen den Normalenvektoren $(2,3,-2)$ und (laut c.)) $(-1,-1,1)$ ist

$$\alpha = \arccos\left(\frac{(2,3,-2)\cdot(-1,-1,1)}{\sqrt{2^2+3^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+(1)^2+1^2}}\right)$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{-7}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{3}}\right) = 2,94.... \text{ (im Bogenmaß)} \approx 168°$$

Aufgabe 6

a.) Die Fläche ist $\frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right|$

$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2}$

$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{14} \approx 1.87$

b.) Auf der Dreiecksfläche steht lt. a) der Vektor $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ senkrecht. Seine Norm ist $\sqrt{14}$. Also hat der Vektor $(\frac{-3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}})$ die Norm 1 und steht senkrecht auf der Dreiecksfläche.

c.) Das Volumen des Spats ist der Betrag der Determinante mit den Zeilen $P_1 = (1,1,1)$, $P_2 = (2,4,1)$, $P_3 = (x,y,z)$. Es ist also

$$\left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} \right| = |4z + x + 2y - 4x - y - 2z| = |-3x + y + 2z|$$

(Regel von $\mathbb{R}^3$-Sarrus wurde benutzt).