Übungsblatt 8 - Musterlösungen

Technische Hochschule Mittelhessen, Mathematik 1 für EI, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

a.) $p(x) = x^4 - x^3 - 12x^2 - 4x + 16$

Horner-Schema, Versuch mit $x = -2$

	1	-1	-12	-4	16
-2 |	0	-2	6	12	-16
	1	-3	-6	8	$\underline{0}$

unten rechts kommt Null heraus, also ist $x_0 = -2$ Nullstelle,
und $\frac{p(x)}{(x+2)} = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$.
(Man beachte: Die Koeffizienten des Polynoms $\frac{p(x)}{(x+2)} = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ stehen in der untersten Zeile des Horner-Schemas.)

Horner-Schema, Versuch mit $x = 2$

	1	-3	-6	8
2 |		2	-2	-16
	1	-1	-8	$\underline{-8}$

unten rechts kommt nicht Null heraus, also ist $p(2) \neq 0$

Horner-Schema, noch ein Versuch mit $x = -2$

	1	-3	-6	8
-2 |		-2	10	-8
	1	-5	4	$\underline{0}$

unten rechts kommt Null heraus, also ist $x_0 = -2$eine doppelte Nullstelle,
und $\frac{p(x)}{(x+2)^2} = x^2 - 5x + 4$

Nun kann man die p$-$q$-$Formel benutztten:

$x_{1|2} = 2.5 \pm \sqrt{(2.5)^2 - 4} = 2.5 \pm \sqrt{2.25}$
$= 2.5 \pm 1.5$
$x_1 = 4 \qquad x_2 = 1$

$x = -2$ ist eine doppelte Nullstelle, $x = 4$ und $x = 1$ einfache:
$p(x) = (x + 2)^2 \cdot (x - 4) \cdot (x - 1)$

b.)

$p(x) = 2x^5 - 14x^4 + 34x^3 - 38x^2 + 32x - 24$
$p(x) = 2 \cdot (x^5 - 7x^4 + 17x^3 - 19x^2 + 16x - 12)$

Horner-Schema: Rate Nullstelle $x = 2$

	1	-7	17	-19	16	-12
2 |		2	-10	-14	-10	12
	1	-5	7	-5	6	$\underline{0}$

$x = 2$ ist Nullstelle
$\frac{p(x)}{(x-2)} = 2 \cdot (x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6)$

Versuche Nullstelle $x = 3$

$$\begin{array}{c|ccccc} & -1 & -5 & 7 & -5 & 6 \\ 3 & & 3 & -6 & 3 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & -2 & \underline{0} \end{array}$$

$x = 3$ ist Nullstelle
$\frac{p(x)}{(x-2)\cdot(x-3)} = 2 \cdot (x^3 - 2x^2 + x - 2)$.

Versuche Nullstelle $x = 2$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & & 2 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \underline{0} \end{array}$$

$x = 2$ ist wieder Nullstelle
$\frac{p(x)}{(x-2)^2\cdot(x-3)} = 2 \cdot (x^2 + 1)$.

Die Nullstellen von $x^2 + 1 = 0$ sind $\pm j$

D.h.: $p(x) = 2 \cdot (x-2)^2 \cdot (x-3) \cdot (x+j) \cdot (x-j)$.
2 ist eine doppelte Nullstelle
3, j und $-j$ sind einfache Nullstellen.

Aufgabe 2

$p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$.
Einsetzen der Werte an den Stellen $x = 3$, $x = 2$ und $x = 0$ liefert:
$a_2 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3 + a_0 = 14 \quad => \quad 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 14$
$a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2 + a_0 = 7 \quad => \quad 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 7$
$a_2 \cdot 0^2 + a_1 \cdot 0 + a_0 = 5 \quad => \quad a_0 = 5$

Das LGS hat die Gestalt:

$$\begin{pmatrix} a_2 & a_1 & a_0 & \\ 9 & 3 & 1 & 14 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

subtrahiere $\frac{4}{9}$ mal Zeile 1 von Zeile 2

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 & 14 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{9} & \frac{7}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Rückwärts einsetzen:
$a_0 = 5$
$a_1: \quad \frac{2}{3}a_1 + \frac{5}{9} \cdot 5 = \frac{7}{9} \quad => \quad \frac{2}{3}a_1 = \frac{7-25}{9} = -\frac{18}{9} = -2$
$=> a_1 = -3$
a_2: $\quad 9a_2 + 3 \cdot (-3) + 1 \cdot (5) = 14$
$=> 9a_2 - 9 + 5 = 14 \quad => \quad 9a_2 = 18 \quad => a_2 = 2$

Das gesuchte Polynom hat die Gestalt
$p(x) = 2x^2 - 3x + 5$.

Aufgabe 3

a.)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{0}{2} = 0$$

b.)

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2-x-12}{x+3} = \lim_{x\to -3} \frac{(x-4)\cdot(x+3)}{(x+3)}$$

$$\lim_{x\to -3} (x-4) = -3-4 = -7$$

c.)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(x)}$$

Additionstheorem sinus:
$\sin(2x) = \sin(x + x) = \sin(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot \cos(x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
Daher:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0}(2\cos(x)) = 2\cos(0) = 2$$

d.)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2x + 3}{x^2 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \infty$$

(erhalten durch Multiplikation von Zähler und Nenner mit $\frac{1}{x^2} = \frac{\infty - 0 + 0}{1+0}$)

e.)

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)(1+\sqrt{x})}{1-x}$$
$$= \lim_{x\to 1}(1+\sqrt{x}) = 1 + 1 = 2$$

Aufgabe 4

a.) Rechtsseitiger Grenzwert bei $x_a = 3$:

$$\lim_{x\to 3^+} (x-3) = 0$$
$$\lim_{x\to 3^-} (x) = 3$$

Beide unterschiedlich =>Funktion ist nicht stetig.

b.) Es müssen folgende beiden Bedingungen gelten:

1.) Bei $x = 2$: $x^2 = ax + b$

2.) Bei $x = 5$: $ax + b = -5$

Das heisst:

1.) $2^2 = a \cdot 2 + b$ => $4 = 2a + b$

2.) $5 \cdot a + b = -5$

Lösen des LGS:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & -5 \end{pmatrix} \end{array}$$

liefert

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1.5 & -15 \end{pmatrix} \end{array}$$

=>$-1.5b = -15$ => $b = 10$
$-2a + 10 = 4$ => $a = -3$
es muss gelten $a = -3$ und $b = 10$.

Aufgabe 5

a.) Die Definitionslücken sind an den Stellen, an denen der Nenner 0 ist. Diese sind: $x = 1$ und $x = 4$ (doppelt).

b.) Wegen

$$\lim_{x\to 1}(y) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x(x-1)}{(x-1)(x-4)(x-4)}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{(x-4)(x-4)}\right)$$
$$= \frac{1}{(-3)\cdot(-3)} = \frac{1}{9}$$

lässt sich die Lücke an der Stelle $x = 1$ stetig schliessen.

Wegen

$$\lim_{x\to 4^+}\left(\frac{x(x-1)}{(x-1)(x-4)(x-4)}\right) = \frac{4\cdot 3}{3\cdot 0^+\cdot 0^+} = \infty$$

hat die Funktion bei $x = 4$ einen Pol.

c.) Die Nullstelle der Funktion ist bei $x = 0$ (Zähler Null).
Beachte: Bei $x = 1$ hat die Funktion keine Nullstelle, hier liegt ja eine Definitionslücke vor

d.) Rechtsseitiger Grenzwert ist $+\infty$, vgl. b.)
Linksseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x\to 4^-}\left(\frac{x(x-1)}{(x-1)(x-4)(x-4)}\right) = \frac{4\cdot 3}{3\cdot 0^-\cdot 0^-} = \infty$$

e.)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x(x-1)}{(x-1)(x-4)(x-4)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{(x-4)(x-4)}\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x^2-8x+16}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x-8+\frac{16}{x}}\right) = \frac{1}{\infty-8+0} = 0$$

Analog:

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x(x-1)}{(x-1)(x-4)(x-4)}\right) = \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x}{(x-4)(x-4)}\right)$$
$$= \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x}{x^2-8x+16}\right) = \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{x-8+\frac{16}{x}}\right)$$
$$= 0$$