Übungsblatt 11 - Musterlösung

Technische Hochschule Mittelhessen, Mathematik 1 für EI, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1 - 25 Punkte

a.) 2 Punkte

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= 4 + 3j + 2 - j \\ &= 6 + 2j \end{aligned}$$

b.) 3 Punkte

$$\frac{z_4}{z_1} = \frac{c+dj}{4+3j} = \frac{(c+dj)\cdot(4-3j)}{(4+3j)\cdot(4-3j)}$$

$$= \frac{4c+3d+j\cdot(4d-3c)}{16+9} = \frac{4c+3d}{25} + j\ \frac{4d-3c}{25}$$

Anmerkung: Division ist auch möglich durch Umrechnung in Polarform und dann Division in Polarform. Der Nachteil dabei ist, dass man um die Polarform von $c + jd$ zu bestimmen, eine Fallunterscheidung machen muss, und ausschließen muss, dass der Nenner im Argument des arctan bzw. arccos 0 ist. Das wird sehr kompliziert.

c.) 3 Punkte

$$|z_1 + z_2^*| = |4 + 3j + (2 + j)| = |6 + 4j| = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$$

d.) 2 Punkte

$$z_5^3 = (8\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{6}})^3 = 8^3 \cdot e^{\frac{j\pi}{2}} = 512 \cdot e^{\frac{j\pi}{2}} = 512\cdot(\cos(\pi/2) + j\cdot\sin(\pi/2)) = 512 \cdot j$$

e.) 9 Punkte

Es gibt drei dritte Wurzeln.

$k = 0$:

$$z = (8\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{6}})^{\frac{1}{3}} = 2\cdot e^{(j\cdot\frac{\pi}{18})}$$

$k = 1$:

$$z = (8\cdot e^{(j\cdot(\pi\cdot\frac{1}{6}+2\pi)})^{\frac{1}{3}} = 2\cdot(e^{(j\pi\cdot\frac{13}{6})})^{\frac{1}{3}} = 2\cdot e^{(j\pi\cdot\frac{13}{18})}$$

$k = 2$:

$$z = (8\cdot e^{(j\cdot(\pi\cdot\frac{1}{6}+4\pi)})^{\frac{1}{3}} = 2\cdot e^{(j\pi\cdot\frac{25}{6})})^{\frac{1}{3}} = 2\cdot e^{(j\pi\cdot\frac{25}{18})}$$

f.) 3 Punkte

$$z_5 = 8\cdot\cos(\frac{\pi}{6}) + j\cdot 8\cdot\sin(\frac{\pi}{6}) = 8\sqrt{3}/2 + 8\cdot j\cdot 1/2 = 4\sqrt{3} + 4j \approx 6,039 + 4j$$

g.) 3 Punkte

$$z_3 = -1 + \sqrt{3}j$$

$$=>|z_3| = \sqrt{1 + \sqrt{3}^2} = 2$$

$$z_3 \text{ oberhalb der x-Achse} => \phi = \arccos(\frac{\mathrm{Re} z_3}{|z_3|}) = \arccos(\frac{-1}{2}) = \frac{2}{3}\pi$$

$$=> z_3 = 2\cdot e^{j\cdot\frac{2}{3}\pi} \quad \text{bzw.} \quad z_3 = 2\cdot e^{j\cdot 120^\circ}$$

Aufgabe 2

a.) 5 Punkte

Definitionsbereich: Die $x \in \mathbb{R}$ mit $\ln(|x|) > 0$, d.h. $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, damit Ausdruck unter der Wurzel echt positiv ist. Für diese ist dann der Nenner nicht 0.

Stammfunktion: $F_2'(x) = \frac{1}{2x \cdot \sqrt{\ln(x)}}$,

denn: für $x > 0$ ist $|x| = x$ und nach Kettenregel
$F_2'(x) = \frac{d\sqrt{\ln(x)}}{dx} = \frac{1}{2x \cdot \sqrt{\ln(x)}}$

Für $x < 0$ ist $|x| = -x$ und nach Kettenregel
$F_2'(x) = \frac{d\sqrt{\ln(-x)}}{dx} = \frac{1}{2 \cdot (-x)} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{\ln(-x)}} = \frac{1}{2x \cdot \sqrt{\ln(-x)}}$

$$\int f_a(x)dx = F_2(x)$$

b.) 5 Punkte

Def.Bereich sind die x mit $x \neq 0$ und $\ln x \neq 0$ und $\ln x$ definiert. D.h. $\mathbb{R}^+$ ohne $x = 0$ und $x = 1$, also $\mathbb{R}^+ \backslash \{0, 1\}$.

Stammfunktion: Nach Kettenregel (innere $\cdot$ äussere Ableitung):

$$\frac{d \ln \ln x}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x \cdot \ln x}$$

$$\int f_b(x)dx = F_5(x)$$

c.) 5 Punkte

Def.Bereich sind $x \in \mathbb{R}$, für die $\sin(x) \neq 0$ gilt, d.h. $\mathbb{R}$ ausser den ganzzahligen Vielfachen von π. Der Definitionsbereich ist also $\{x \in \mathbb{R}\colon x \neq k \cdot \pi \text{ für } k \in \mathbb{Z}\}$

Stammfunktion: $F_1'(x)$ nach Quotientenregel mit $u = x^2$, $v = \sin(x)$, $u' = 2x$, $v' = \cos(x)$

$$\begin{aligned} F_1'(x) &= \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2} \\ &= \frac{2x \cdot \sin(x) - (\cos(x)) \cdot x^2}{\sin^2(x)} \\ &= x \cdot \frac{2\sin(x) - \cos(x)}{\sin^2(x)} \end{aligned}$$

$$\int f_c(x)dx = F_1(x)$$

d.) 5 Punkte

Def.Bereich: $f_d(x)$ ist Polynom, überall definiert, also ist der Definitionsbereich $\mathbb{R}$.

Stammfunktion: $F_4'(x) = 3x^2 + 6x - 4$

$$\int f_d(x)dx = F_4(x)$$

e.) 5 Punkte

Def.Bereich: Der Nenner ist stets$\neq 0$, da stets $x^2 \geq 0$, also ist der Definitionsbereich $\mathbb{R}$.

Stammfunktion: $\arctan(x)$ ist eine der elementaren Funktionen, die Ableitung ist $\frac{1}{1+x^2}$. also ist $F_3'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

$$\int f_e(x)dx = F_3(x)$$

Aufgabe 3

a.) 5 Punkte
Jeweils nach Definition der Matrixmultiplikation Zeile von A mit Spalte von B mal-nehmen ergibt

$$\begin{pmatrix} 2+2\cdot 3 & 2\cdot 3+3\cdot 4 & 5\cdot 2+3\cdot 6 \\ a+2b & 3a+4b & 5a+6b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 18 & 28 \\ a+2b & 3a+4b & 5a+6b \end{pmatrix}$$

b.) 6 Punkte

Berechnung mit$\mathbb{R}^3$-Sarrus:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & b & 1 & -1 \\ 2 & -1 & c & 2 & -1 \\ 3 & a & 0 & 3 & a \end{pmatrix}$$

$\det(M) = 1\cdot(-1)\cdot 0 + (-1)\cdot c\cdot 3 + b\cdot 2\cdot a - b\cdot(-1)\cdot 3 - 1\cdot c\cdot a - (-1)\cdot 2\cdot 0$
$= -3c + 2ba + 3b - ca$

c.) 7 Punkte
Allgemein:

$$y^{par} = \frac{x\cdot y}{|x|^2}\cdot x$$
$$y^{senk} = y - y^{par}$$

Hier:

$$y^{par} = \frac{(1,1)\cdot(-3,2)}{1^2+1^2}\cdot(1,1) = \frac{-1}{2}\cdot(1,1) = (\frac{-1}{2}; \frac{-1}{2})$$

$$y^{senk} = (-3,2) - (\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}) = (-2.5;\ 2.5)$$

Lösung im vorgegebenen Feld also:

$$y^{par} = (-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$$
$$y^{senk} = (-2.5; -2.5)$$

d.) 7 Punkte
Allgemein: $e = s + \lambda_1 \cdot r_1 + \lambda_2 \cdot r_2$
$=>$Normalenvektor $(u_1, u_2, u_3) = N$ ist r_1 x r_2 (Vektorprodukt)
Mit $d = N \cdot s$ (Skalarprodukt) ist $e = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : n_1x + n_2y + n_3z = d\}$
Hier: $N = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ x $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, d = (2,1,0)\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

$$e = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x + 2y - z = 0\}$$

Aufgabe 4

a.) 15 Punkte

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

subtrahiere drei mal erste Zeile von zweiter Zeile

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

addiere erste Zeile zu dritter Zeile

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

subtrahiere zwei mal zweite von dritter Zeile

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Zeilenstufenform ist erreicht.

Rückwärts einsetzen liefert folgendes Ergebnis:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2\lambda \\ 2 - 2\lambda \\ \lambda \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nebenrechnung:

$x_4 : 2x_4 = 4 => x_4 = 2$

$x_3 :$ frei wählbar, setze $x_3 = \lambda$

$x_2 : x_2 + 2x_3 = 2 => x_2 + 2\lambda = 2 => x_2 = 2 - 2\lambda$

$x_1 : x_1 + x_2 = 1 => x_1 = 1 - x_2 => x_1 = 1 - 2 + 2\lambda => x_1 = -1 + 2\lambda$

$$\text{Lösungsvektor: } \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b.) 10 Punkte

Variante 1

In der Schnittmenge beider Ebenen liegen alle Punkte die sowohl in e_1, als auch in e_2 liegen. Das sind die Punkte, für die $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ existieren mit

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

d.h.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \mu_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} - \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Als lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \mu_1 & \mu_2 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nach Teil a.) der Aufgabe ist die Lösungsmenge dieses LGS:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Man erhält eine Darstellung der Schnittgerade, indem man $\lambda_1 = -1 + 2\lambda$ und $\lambda_2 = 2 - 2\lambda$ in die Ebenengleichung von e_1 einsetzt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} + (-1 + 2\lambda) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + (2 - 2\lambda) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 - 1 + 2\lambda + 2 - 2\lambda \\ -4 - 1 + 6\lambda + 8 - 8\lambda \\ -6 + 1 - 2\lambda + 2 - 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Einsetzen von $\mu = \lambda$ und $\mu_2 = 2$ in e_2 liefert:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 - 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Schnittgerade: } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Variante 2

Es wird die Normalenform beider Ebenen gebildet, und dann ein LGS gelöst:

Ebene 1:

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$d = (7, -2, 1) \cdot (0, -4, -6) = 8 - 6 = 2$

$e_1 : 7x - 2y + z = 2.$

Ebene 2:

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$D = (4, 0, 0) \cdot (1, 1, 1) = 4$

$e_2 : x = 1.$

Löse nun das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \\ 7 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

subtrahiere 1/7 * erste Zeile von zweiter:

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \\ 7 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2/7 & -1/7 & 5/7 \end{array}$$

z ist frei wählbar, setze $z = \lambda_1$.

y erfüllt: $2y/7 - \lambda_1/7 = 5/7 \Rightarrow y = 0,5\lambda_1 + 2,5$

x erfüllt: $7x - 2y + z = 2 \Rightarrow 7x - \lambda_1 + 5 + \lambda_1 = 2 \Rightarrow x = 1$

Somit ist $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5\lambda_1 + 2,5 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2,5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$