Übungsblatt 12 - Musterlösung

Technische Hochschule Mittelhessen, Mathematik 1 für EI, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

a.)

$$\int (4x^5 + 2x^4 - x^2 - 1)\ dx = \frac{4}{6}x^6 + \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 - x + c$$
$$= \frac{2}{3}x^6 + \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 - x + c$$

b.)

$$\int (2e^x - \ln x)\ dx = 2\int e^x\ dx - \int \ln x\ dx$$
$$= 2e^x - (x\ln x - x) + c$$
$$= 2e^x - x\ln x - x + c$$

c.)

$$\int \frac{a}{b\sqrt{x}}\ dx = \frac{a}{b}\cdot\int\frac{1}{\sqrt{x}}\ dx = \frac{a}{b}\cdot 2\sqrt{x} + c = \frac{2a}{b}\sqrt{x} + c$$

d.)
Wegen $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ ist $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$ und damit:

$$\int \frac{3}{1-\cos^2(x)}\ dx = \int\frac{3}{\sin^2(x)}\ dx = 3\int\frac{1}{\sin^2(x)}\ dx = -3\cot x + c$$

Aufgabe 2

a.)
Partielle Integration: $(u\cdot v)' = u'v + v'u$
$=> u\cdot v = \int u'v + \int v'u$
$=> \int v'u = u\cdot v - \int u'v.$
Hier: $u = x$, $u' = 1$, $v' = \sin(x)$, $v = -\cos(x)$
$=> \int x\cdot\sin(x)\ dx = x(-\cos(x)) - \int 1\cdot(-\cos(x)\ dx$

$$= -x\cos(x) + \int\cos(x)dx$$
$$= -x\cos(x) + \sin(x) + c$$

b.)
$(u\cdot v)' = u'v + v'u => u\cdot v = \int u'v + \int v'u$
$=> \int v'u = u\cdot v - \int u'v$
Hier: $v' = 1$, $v = x$, $u = \log_a x$, $u' = \frac{1}{(\ln a)\cdot x}$

$$\int \log_a x\ dx = (\log_a x)\cdot x - \int\frac{x}{(\ln a)\cdot x}\ dx = x\cdot\log_a(x) - \int\frac{1}{\ln a}\ dx$$

und weil $\frac{1}{\ln a}$ eine Konstante ist, die nicht von x abhängt:

$$= x\cdot\log_a(x) - \frac{1}{\ln a}\cdot\int 1\ dx$$
$$= x\cdot\log_a(x) - \frac{x}{\ln a} + c$$

c.)
$(u \cdot v)' = u'v + v'u => u \cdot v = \int u'v + \int v'u$
Hier: $v' = e^{-x}$, $v = -e^{-x}$, $u = x^2$, $u' = 2x$
$\int x^2 \cdot e^{-x}\ dx = x^2 \cdot (-e^{-x}) - \int 2x \cdot (-e^{-x})\ dx$

$$= -x^2 e^{-x} + 2 \int x \cdot e^{-x}\ dx$$

$$\left[\begin{array}{c} \text{Nebenrechnung: partielle Integration zur Berechnung von} \int x \cdot e^{-x}\ dx \\ \text{mit } v' = e^{-x}, v = -e^{-x}, u = x, u' = 1 \\ \int x \cdot e^{-x}\ dx = x \cdot (-e^{-x}) - \int 1 \cdot (-e^{-x})\ dx \\ = x \cdot (-e^{-x}) + \int (e^{-x})\ dx \\ = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} \end{array}\right]$$

$=> \int x^2 e^{-x}\ dx = -x^2 e^{-x} + 2(-xe^{-x} - e^{-x}) + c$

$$= -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c$$

$$= e^{-x} \cdot (-x^2 - 2x - 2) + c$$

d.)
$\int v'u = u \cdot v - \int u'v$
Hier: $v' = \cos(x), v = \sin(x), u = \cos(x), u' = -\sin(x)$

$$\int \cos^2(x) dx = \cos(x) \cdot \sin(x) - \int ((-\sin(x) \cdot \sin(x)) dx$$

$$= \cos(x) \cdot \sin(x) + \int \sin^2(x) dx$$

$$= \cos(x) \cdot \sin(x) + \int (1 - \cos^2(x)) dx$$

$$(\text{weil } \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1)$$

$$= \cos(x) \cdot \sin(x) + \int 1 dx - \int \cos^2(x) dx$$

$$= \cos(x) \cdot \sin(x) + x - \int \cos^2(x) dx$$

Die Gleichung

$$\int \cos^2(x) dx = \cos(x) \cdot \sin(x) + x - \int \cos^2(x) dx$$

wird nach $\int \cos^2(x) dx$ aufgelöst:

$$2 \int \cos^2(x) dx = \cos(x) \cdot \sin(x) + x$$

$$=> \int \cos^2(x) dx = \frac{1}{2}(\cos(x) \cdot \sin(x) + x)$$

Aufgabe 3

a.)

$$\int 2e^{4x+7}dx = 2\int e^{4x+7}dx$$

$$= 2\int f(ax+b)dx$$

$$\text{mit } a=4, b=7, f(z)=e^z, F(z)=e^z$$

$$= 2\cdot\frac{1}{4}e^{4x+7}+c$$

$$= \frac{1}{2}\cdot e^{4x+7}+c$$

b.)

$$\int 3\cdot\frac{\ln x}{x}\ dx = 3\int(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\ dx$$

$$= 3\int(f(x))\cdot f'(x)\ dx \qquad \text{mit} \quad f(x)=\ln(x), f'(x)=1/x$$

$$= 3\cdot\frac{(f(x))^2}{2}+c = 3\cdot\frac{(\ln x)^2}{2}+c = \frac{3}{2}\cdot(\ln x)^2+c$$

c.)

$$\int\frac{\cos(2x)}{1+2\sin(2x)}dx$$

mit $f(x)=1+2\sin(2x),\ f'(x)=4\cos(2x)$

$$= \frac{1}{4}\cdot\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\ln|1+2\sin(2x)|+c$$

d.)

$$\int\frac{1}{x^2}\cdot e^{-\frac{1}{x}}dx$$

mit $U(x)=-\frac{1}{x}, u(x)=\frac{1}{x^2}, f(U)=e^U, F(U)=e^U$

$$= \int u(x)\cdot f(U(x))dx$$

$$= F(U(x))+c = e^{-\frac{1}{x}}+c$$

Aufgabe 4

a.)

Finden der Stammfunktion durch Parzialbruchzerlegung.

$$f(x) = \frac{x^4 - 3x^3 - x^2 + 8x - 3}{x^2 - 2x - 3}$$

1.) grad (Zählerpolynom) $\geq$ grad(Nennerpolynom)

=>Polynomdivision

$$\begin{array}{rrrrrrl} & (x^4 & -3x^3 & -x^2 & +8x & -3) & : \ (x^2 - 2x - 3) \ = \underline{\underline{x^2 - x + \tfrac{5x-3}{x^2-2x-3}}} \\ - & (x^2 & -2x^3 & -3x^2) & & & \\ & & -x^3 & +2x^2 & +8x & -3 & \\ & - & (-x^3 & +2x^2 & +3x) & & \\ & & & & 5x & -3 & \end{array}$$

2.) Nullstellen des Nennerpolynoms

$x^2 - 2x - 3 = (x+1) \cdot (x-3)$

3.) Parzialbrüche:

$f(x) = x^2 - x + \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}$

4.) Jetzt gilt:

$$\frac{5x-3}{(x+1)\cdot(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x+1)}{(x+1)\cdot(x-3)}$$

d.h. $5x - 3 = A(x-3) + B(x+1)$.

Einsetzen von $x = 3$: $\quad 5 \cdot 3 - 3 = A \cdot 0 + B \cdot 4$

=> $\quad 12 = 4B \quad$ => $B = 3$

Einsetzen von $x = -1$: $\quad -5 - 3 = A \cdot (-4) + B \cdot 0$

=> $\quad -8 = -4A \quad$ => $A = 2$

$$f(x) = x^2 - x + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3}$$

5.) Stammfunktion:

$$F(x) = \int \frac{x^4 - 3x^3 - x^2 + 8x - 3}{x^2 - 2x - 3}\, dx = \int (x^2 - x + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3})\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2\ln|x+1| + 3\ln|x-3| + c$$

b.) Finden der Stammfunktion durch Parzialbruchzerlegung.

$$f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 12x + 24}{x^2 - 4x + 4}$$

1.) grad (Zählerpolynom) $\geq$ grad(Nennerpolynom)

=> Polynomdivision

$$\begin{array}{rllll} & (2x^3 & -3x^2 & -12x & +24) \;:\; (x^2 - 4x + 4) \;=\; \underline{\underline{2x + 5 + \frac{4}{x^2-4x+4}}} \\ - & (2x^3 & -8x^2 & +8x) & \\ & & 5x^2 & -20x & +24 \\ & - & (5x^2 & -20x & +20) \\ & & & & 4 \end{array}$$

2.) Nullstellen des Nennerpolynoms, 2. binomische Formel

$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

3.) Parzialbrüche

$$f(x) = 2x + 5 + \frac{A_1}{(x-2)} + \frac{A_2}{(x-2)^2}$$

4.) Jetzt gilt:

$$\frac{4}{(x-2)^2} = \frac{A_1}{(x-2)} + \frac{A_2}{(x-2)^2}$$

d.h. (formal weiter, man kann es auch direkt sehen)

$4 = A_1(x-2) + A_2$

Einsetzen von $x = 2$ => $4 = A_2$

Einsetzen von $x = 0$ => $A_1 = 0$

5.) Stammfunktion:

$$\int \frac{2x^3 - 3x^2 - 12x + 24}{x^2 - 4x + 4} dx = \int (2x + 5 + \frac{4}{(x-2)^2} dx$$

$$= x^2 + 5x + \frac{4}{(-1)(x-2)} + c = x^2 + 5x - \frac{4}{x-2} + c$$

Aufgabe 5

Es gibt natürlich viele Funktionen, für die das Tool keine Stammfunktion findet.

Eine ist z.B. $f(x) = 1/(\ln(x) + \cos(x))$.