Übungsblatt 13 - Musterlösung

Technische Hochschule Mittelhessen, Mathematik 1 für EI, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

a.)
Berechnung der Stammfunktion mit Parzialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{(x+5)\cdot(x-4)} = \frac{A}{(x+5)} + \frac{B}{(x-4)}$$

$=> A(x-4)+B(x+5)=1$
Einsetzen von $x=4: B(4+5)=1 => B=\frac{1}{9}$
Einsetzen von $x=-5: A(-5-4)=1 => A=-\frac{1}{9}$

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{2}(-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{(x+5)}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{x-4})dx \\
&= \left[-\tfrac{1}{9}\cdot\ln|x+5|+\tfrac{1}{9}\cdot\ln|x-4|\right]_{-1}^{2} \\
&= -\frac{1}{9}\cdot\ln 7+\frac{1}{9}\cdot\ln 2+\frac{1}{9}\cdot\ln 4-\frac{1}{9}\cdot\ln 5 \\
&= \frac{1}{9}(\ln\frac{1}{7}+\ln 2+\ln 4+\ln\frac{1}{5}) \\
&= \frac{1}{9}\cdot\ln\frac{8}{35}\approx -0.16
\end{aligned}$$

b.)

$$\int_{e}^{e^2}\left(\frac{1}{x\cdot\ln x}\right)dx = \int_{e}^{e^2}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\right)dx$$

Zähler ist Ableitung des Nenners:
$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|$
$=\left[\ln|\ln x|\right]_{e}^{e^2}=\ln|\ln e^2|-\ln|\ln e|$
$=\ln 2-\ln 1=\ln 2$
≈ 0.69

c.)
$\int_1^e(\frac{1}{x}\cdot\ln x)dx$ benutze $\int(f'(x)\cdot f(x))dx=\frac{(f(x))^2}{2}$

$=\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e=\frac{(\ln e)^2}{2}-\frac{(\ln 1)^2}{2}=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$

d.)
Es wird c.) benutzt, und $\int(f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\cdot F(ax+b)$

$\int_1^e(\frac{1}{10x+4}\cdot\ln(10x+4))\ dx=\left[\frac{1}{10}\frac{(\ln(10x+4))^2}{2}\right]_1^e$
$=\frac{1}{20}\left[(\ln(10x+4))^2\right]_1^e=\frac{1}{20}\left[(\ln(10e+4))^2-\ln(14)^2\right]\approx\frac{1}{20}\big(3.49^2-2.64^2\big)\approx 0.26$

e.)
Berechnung der Stammfunktion mit Parzialbruchzerlegung:
$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)}$
$=> A(x-2) + B(x-1) = 1$
Einsetzen von $x = 2 : B(2-1) = 1 \Rightarrow B = 1$
Einsetzen von $x = 1 : A(-1) = 1 \Rightarrow A = -1$

$$\int_3^\infty \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx$$

$$= \int_3^\infty \frac{-1}{(x-1)} + \frac{1}{(x-2)} dx$$

$$= \lim_{r\to\infty} \left[-\ln|x-1| + \ln|x-2| \right]_3^r$$

$$= \lim_{r\to\infty} (-\ln(r-1) + \ln(r-2) + \ln 2 - \ln 1)$$

$$= \lim_{r\to\infty} (\ln \frac{r-2}{r-1} + \ln 2 - 0) = \underline{\underline{\ln 2}} \qquad \text{, denn:}$$

$$\lim_{r\to\infty} (\ln \frac{r-2}{r-1}) = \ln 1 = 0$$

Aufgabe 2

Für ein geeignetes c, dass noch berechnet wird, ist

$$f(x) = \int (4x^3 + \sin(x) + \frac{1}{1+x^2} + \ln(x+1)) dx$$

$$= 4 \cdot \frac{x^4}{4} - \cos(x) + \arctan(x) + (x+1)\ln(x+1) - x + c$$

wegen $f(0) = 4$ folgt

$$4 \cdot \frac{0}{4} - \cos(0) + \arctan(0) + (1) \cdot \ln(1) - 0 + c$$

$$=> -1 + c = 4 => c = 5$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^4 - \cos(x) + \arctan(x) + (x+1)\ln(x+1) - x + 5}}$$

Aufgabe 3

a.)
Da $\sin(\omega x)$ im Intervall $[0, \pi/\omega]$ stets ≥ 0 ist, ist die Fläche

$$\int_0^{\pi/\omega} \sin(\omega x)\ dx = \frac{1}{\omega} \int_0^{\pi/\omega} \omega \sin(\omega x)\ dx$$
$$= \frac{1}{\omega} \left[-\cos(\omega x) \right]_0^{\pi/\omega} = \frac{1}{\omega}(-\cos(\pi) + \cos(0)) = \frac{1}{\omega}(1+1) = \frac{2}{\omega} \quad .$$

b.)
Man berechnet zunächst die Schnittpunkte (oder liest sie aus einer Skizze ab). Dazu werden beide Funktionen gleich gesetzt:

$$y_1(x) = y_2(x) \Rightarrow x/4 = \sqrt{x} \Rightarrow x = 4 \cdot \sqrt{x} \Rightarrow x \in \{0, 16\}.$$

Die Schnittpunkte von $y_1 = x$ und $y_2 = \sqrt{x}$ liegen bei $x = 0$ und $x = 16$. Im Intervall $\left[0, 1\right]$ ist $y_2 \geq y_1$, also ist die Fläche

$$\int\limits_0^{16} (\sqrt{x} - x/4)dx = \left[\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{x^2}{2\cdot 4}\right]_0^{16}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \sqrt{16}^3 - \frac{1}{8} \cdot 16^2 - 0 + 0 = \frac{128}{3} - 32 = 42 + \frac{2}{3} - 32 = 10 + \frac{2}{3}$$

c.)
Nach Aufgabe 1.e ist

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx = \ln \frac{|x-2|}{|x-1|}$$

Die Polstellen sind bei $x = 1$ und $x = 2$, das Integral wird $x = 1.5$ geteilt:

$$\int\limits_1^2 \frac{1}{(x-1)(x-2)}\ dx$$

$$= \lim_{r \to 1} \left[\ln \tfrac{|x-2|}{|x-1|}\right]_r^{1.5} + \lim_{r \to 2} \left[\ln \tfrac{|x-2|}{|x-1|}\right]_{1.5}^r$$

$$= \ln \frac{|1.5-2|}{|1.5-1|} - \lim_{r \to 1} \ln \frac{|1-2|}{|r-1|} + \lim_{r \to 2} \ln \frac{|r-2|}{|r-1|} - \ln \frac{|1.5-2|}{|1.5-1|}$$

=(in der Schreibweise der Grenzwerte)

$$-\ln \frac{1}{0} + \ln \frac{0}{1} = -\ln \infty + \ln 0 = -\infty - \infty = -\infty$$

<u>Die Fläche ist nicht endlich</u>

Aufgabe 4

a.)
Die Nullstellen sind bei $x-3=0$, d.h. $x=3$ und bei $2x=0$, d.h. $x=0$

b.)
Volumen Rotationskörper $= \pi \cdot \int\limits_0^3 ((x-3)\sqrt{2x})^2 \; dx$

$$= \pi \cdot \int\limits_0^3 (x^2-6x+9)\cdot 2x \; dx$$

$$= \pi \cdot \int\limits_0^3 (2x^3-12x^2+18x) \; dx$$

$$= \pi \left[\tfrac{2}{4}\cdot x^4 - \tfrac{12}{3}\cdot x^3 + \tfrac{18}{2}\cdot x^2\right]_0^3$$

$$= \pi \left[\tfrac{1}{2}\cdot 3^4 - 4\cdot 3^3 + 9\cdot 3^2\right]$$

$$= 9\pi\cdot(4,5-12+9) = 9\cdot 1,5\cdot\pi \approx 42.4$$

c.)
Linearer Mittelwert:

$$\frac{1}{3-0}\int\limits_0^3 ((x-3)\sqrt{2x}) \; dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\int\limits_0^3 (x^{1.5}-3x^{0.5}) \; dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\left[\tfrac{x^{2.5}}{2.5} - \tfrac{3x^{1.5}}{1.5}\right]_0^3$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cdot 3^{1.5}\cdot 2}{3}\cdot\left[\tfrac{3}{5}-\tfrac{3}{3}\right] = \sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 2\cdot(\frac{-2}{3})$$

$$\approx 3.27$$

d.)
Quadratischer Mittelwert M:

$$M^2 = \frac{1}{3}\cdot\int\limits_0^3 ((x-3)^2\cdot 2x)dx \qquad \text{Nutze Teil b.)}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 9\cdot 1.5 = 4.5$$

$$=> M = \sqrt{4.5} \approx 2.12$$