Übungsblatt 2 - Musterlösung

Technische Hochschule Mittelhessen, Fachbereich MNI, Diskrete Mathematik, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

Bitte vereinfachen Sie die folgenden booleschen Ausdrücke, dabei sind a, b, c jeweils boolesche Variable, die den Wert 0 oder 1 annehmen können. Bitte geben Sie die Rechengesetze an, die Sie benutzt haben.

a.) $(a \vee b) \wedge \neg(\neg a \wedge \neg b)$.

Lösung:

$(a \vee b) \wedge \neg(\neg a \wedge \neg b)$

$= (a \vee b) \wedge (a \vee b)$ (de Morgan)

$= a \vee b$ $x \wedge x = x$ angewandt auf $x = a \wedge b$

b.) $\neg(a \wedge b) \wedge b$.

Lösung:

$\neg(a \wedge b) \wedge b$

$= (\neg a \vee \neg b) \wedge b$ (de Morgan)

$= (\neg a \wedge b) \vee (\neg b \wedge b)$ (Distributivgesetz)

$= (\neg a \wedge b) \vee 0$ $\neg b \wedge b = 0$

$= \neg a \wedge b$ $x \vee 0 = x$, angewandt auf $x = \neg a \wedge b$

c.) $\neg(a \wedge (b \vee \neg a)) \vee (c \wedge a)$.

Lösung:

$\neg(a \wedge (b \vee \neg a)) \vee (c \wedge a)$

$= \neg((a \wedge b) \vee (a \wedge \neg a)) \vee (c \wedge a)$ (Distributivgesetz)

$= \neg((a \wedge b) \vee 0) \vee (c \wedge a)$ $a \wedge \neg a = 0$

$= \neg(a \wedge b) \vee (c \wedge a)$ $x \vee 0 = x$, angewandt auf $x = a \wedge b$

$= \neg a \vee \neg b \vee (c \wedge a)$ (de Morgan)

$= \neg b \vee \neg a \vee (c \wedge a)$ (Kommutativgesetz)

$= \neg b \vee (\neg a \vee (c \wedge a))$ (Assoziativgesetz).

$= \neg b \vee ((\neg a \vee c) \wedge (\neg a \vee a))$ (Distributivgesetz)

$= \neg b \vee ((\neg a \vee c) \wedge 1)$ $\neg a \vee a = 1$

$= \neg b \vee (\neg a \vee c)$ $x \wedge 1 = x$, angewandt auf $x = \neg a \vee c$

$= \neg b \vee \neg a \vee c$

$(= \neg a \vee \neg b \vee c$, Kommutativgesetz).

Aufgabe 2

Bitte beweisen Sie durch Aufstellung von Wertetabellen die folgenden Gesetze zur Rechnung mit booleschen Variablen a, b, c.

a.) (Distributivgesetz) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Lösung:

a	b	c	$b \vee c$	$a \wedge (b \vee c)$	$(a \wedge b)$	$(a \wedge c)$	$(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Für jede Belegung der Variablen a, b, c ist der Inhalt der Spalten $a \wedge (b \vee c)$ und $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ gleich, also ist $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, also gilt das Distributivgesetz.

b.) (Eine De Morgan'sche Regel) $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$.

Lösung:

a	b	$a \wedge b$	$\neg(a \wedge b)$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \vee \neg b$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Für jede Belegung der Variablen a, b ist der Inhalt der Spalten $\neg(a \wedge b)$ und $\neg a \vee \neg b$ gleich, also ist $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$, also gilt die de Morgan-Regel.

c.) (Die andere De Morgan'sche Regel) $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$.

Lösung:

a	b	$a \vee b$	$\neg(a \vee b)$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \wedge \neg b$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Für jede Belegung der Variablen a, b ist der Inhalt der Spalten $\neg(a \vee b)$ und $\neg a \wedge \neg b$ gleich, also ist $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$, also gilt die de Morgan-Regel.

Aufgabe 3

(Beweis der konjunktiven Normalform KNF für zweistellige boolesche Funktionen)

Es sei $f(a, b)$ eine Funktion, die zwei booleschen Variablen a, b wieder eine boolesche Variable zuordnet. Die Funktion habe für r der vier möglichen Belegungen von (a, b) den Wert 0. Bitte beweisen Sie:

$$f(a, b) = \max_1 \wedge ... \wedge \max_r$$

wobei $\max_1, ..., \max_r$ diejenigen Max-Terme von $a \vee b, \quad a \vee \neg b, \quad \neg a \vee b, \quad \neg a \vee \neg b$ sind, für die $f(a, b) = 0$ gilt.

Lösung:

Es wird gezeigt:

Für jede Belegung von a und b gilt $f(a, b) = 0 \Leftrightarrow \max_1(a, b) \wedge ... \wedge \max_r(a, b) = 0$.

Dazu:

" $\Rightarrow$ ": $\quad f(a, b) = 0 \Rightarrow$ der Max-Term, der bei der Belegung zu 0 wird, ist einer der Max-Terme $\max_1, ..., \max_r$

$\Rightarrow \max_1(a, b) \wedge ... \wedge \max_r(a, b) = 0$

" $\Leftarrow$ ": $\quad \max_1(a, b) \wedge ... \wedge \max_r(a, b) = 0$

$\Rightarrow$ einer der Max-Terme ist 0

$\Rightarrow f(a, b) = 0$ (weil Max-Term ausgewählt). q.e.d.

Aufgabe 4

Es seien a, b, c boolesche Variable.

a.) Bitte finden Sie die disjunktive Normalform DNF der Funktion $a \Rightarrow b$.

Lösung:

a	b	$a \Rightarrow b$	
0	0	1	$\rightarrow$Minterm $\neg a \wedge \neg b$
0	1	1	$\rightarrow$Minterm $\neg a \wedge b$
1	0	0	
1	1	1	$\rightarrow$Minterm $a \wedge b$

DNF: $(a \Rightarrow b) = (\neg a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b) \vee (a \wedge b)$.

b.) Bitte finden Sie die konjunktive Normalform KNF der Funktion $a \Rightarrow b$.

(Anmerkung: In einer Welt, in der die Regel " Alibi $\Rightarrow$ unschuldig" gilt, ist "kein Alibi oder unschuldig" für jede Person wahr :-)).

Lösung:

a	b	$a \Rightarrow b$	
0	0	1	
0	1	1	
1	0	0	$\rightarrow$ Maxterm$\neg a \vee b$
1	1	1	

KNF: $(a \Rightarrow b) = (\neg a \vee b)$.

c.) Bitte finden Sie die disjunktive Normalform DNF der Funktion $a \vee (b \wedge c)$.

Lösung:

a	b	c	$a \vee (b \wedge c)$	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	$\rightarrow$Minterm $\neg a \wedge b \wedge c$
1	0	0	1	$\rightarrow$Minterm $a \wedge \neg b \wedge \neg c$
1	0	1	1	$\rightarrow$Minterm $a \wedge \neg b \wedge c$
1	1	0	1	$\rightarrow$Minterm $a \wedge b \wedge \neg c$
1	1	1	1	$\rightarrow$Minterm $a \wedge b \wedge c$

DNF: $a \vee (b \wedge c) = (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c)$

(nicht gerade eine einfachere Darstellung :)).

d.) Bitte finden Sie die konjunktive Normalform KNF der Funktion $(a \Leftrightarrow b) \vee c$.

Lösung:

a	b	c	$(a \Leftrightarrow b) \vee c)$	
0	0	0	1	
0	0	1	1	
0	1	0	0	$\rightarrow$Maxterm $a \vee \neg b \vee c$
0	1	1	1	
1	0	0	0	$\rightarrow$Maxterm $\neg a \vee b \vee c$
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	1	

KNF: $(a \Leftrightarrow b) \vee c = (a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee c)$.