Übungsblatt 4 - Musterlösung

Technische Hochschule Mittelhessen, Fachbereich MNI, Diskrete Mathematik, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

a.)
$3 \cdot (2+5) \cdot 4 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 3$
$= 3 \cdot 7 \cdot 4 + 4 + 0 \cdot 3$ (Addition, neutrales Element Multiplikation)
$= 84 + 4 + 0$ (Assoziativgesetz Multiplikation)
$= 88$ (Addition, neutrales Element Addition)

b.)
$a \cdot (b+a) + a \cdot (b \cdot c) - ((a \cdot b) \cdot c + 1 \cdot (0 \cdot a))$
$= a \cdot b + a \cdot a + a \cdot b \cdot c - (a \cdot b \cdot c + 0 \cdot a)$
(Distributivgesetz, Assoziativität Multiplikation, neutrales Element Multiplikation)
$= a \cdot b + a \cdot a + a \cdot b \cdot c - (a \cdot b \cdot c)$
$= a \cdot b + a \cdot a$

c.)
$(a+b) \cdot (a+b)$
$= (a+b) \cdot a + (a+b) \cdot b$ (Distributivgesetz)
$= a \cdot a + b \cdot a + a \cdot b + b \cdot b$ (Distributivgesetz)
$= a \cdot a + a \cdot b + a \cdot b + b \cdot b$ (Kommutativgesetz Multiplikation)
$= a^2 + 2ab + b^2$ (wird so geschrieben)

d.)
$2 \cdot (x+1) + 3 \cdot (x-1)$
$= 2 \cdot x + 2 + 3 \cdot x - 3$ (Distributivgesetz)
$= 2x + 3x + 2 - 3$ (Kommutativgesetz Addition)
$= 5x - 1$

Aufgabe 2

a.) $z(z-w) = (2+3i) \cdot (2+3i-(-1+2i))$
$= (2+3i) \cdot (3+i) = 6 + 3i^2 + 9i + 2i$
$= 6 - 3 + 11i = 3 + 11i$

b.)$\mathrm{Re}(z^* \cdot w) = \mathrm{Re}((2-3i) \cdot (-1+2i))$
$= \mathrm{Re}((-2 - 6i^2 + 3i + 4i))$
$= \mathrm{Re}((-2 + 6 + 7i))$ weil $i^2 = -1$
$= \mathrm{Re}(4 + 7i) = 4$

c.)

$$\frac{z}{w*} = \frac{(2+3i)}{-1-2i} = (2+3i) \cdot \frac{1}{-1-2i} = (2+3i) \cdot \frac{-1+2i}{(-1)^2 + (-2)^2}$$
$$= \frac{(2+3i)(-1+2i)}{1+4} = \frac{-2+6i^2-3i+4i}{5}$$
$$= \frac{-2-6+i}{5} = \frac{-8+i}{5} = -\frac{8}{5} + \frac{1}{5}i$$

d.)

$$\mathrm{Im}(\frac{z^2}{w}) = \mathrm{Im}((2+3i)\cdot(2+3i)\cdot\frac{-1-2i}{(-1)^2+(-2)^2})$$
$$= \mathrm{Im}((4-9+6i+6i)\cdot(\frac{-1-2i}{5})) = \mathrm{Im}(\frac{(-5+12i)(-1-2i)}{5})$$
$$= \mathrm{Im}(\frac{5-24i^2-12i+10i}{5}) = \mathrm{Im}(\frac{29}{5}-\frac{2}{5}i) = -\frac{2}{5}$$

e.) $w^*(z-i) = (-1-2i)(2+3i-i)$
$= (-1-2i)(2+2i)$
$= -2-4i^2-4i-2i$
$= -2+4-6i = 2-6i$

f.) $|z-w^*| = |2+3i-(-1-2i)|$
$= |2+3i+1+2i| = |3+5i|$
$= \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

g.)

$$|\frac{1}{w}+\frac{1}{5}| = |\frac{-1-2i}{(-1)^2+(-2)^2}+\frac{1}{5}| = |\frac{-1-2i}{1+4}+\frac{1}{5}| = |\frac{-1-2i}{5}+\frac{1}{5}| = |-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i+\frac{1}{5}| = |-\frac{2}{5}i| = \frac{2}{5}$$

Aufgabe 3

a)

$$1+2+3+4+5 = \sum_{j=1}^{5} j$$

(statt j kann auch k, i, n, m oder jeder andere Buchstabe gewählt werden)

b.)

$$3+5+7+...+23 = \sum_{j=1}^{11}(2j+1) = \sum_{j=2}^{12}(2j-1)$$

c.)

$$1+4+9+...+400 = \sum_{k=1}^{20} k^2$$

d.)

$$+1-4+9-16+...-400 = \sum_{k=1}^{20}(-1)^{k+1}\cdot k^2$$

e.)

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+... = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{10k}$$

f.) Es steht in der k-ten Klammer:

$$\sum_{j=1}^{8}\frac{k}{j}$$

Insgesamt ist die Summe also:

$$\sum_{k=1}^{9}\sum_{j=1}^{8}\frac{k}{j}$$

(andere Laufindizes möglich).

Aufgabe 4

a)

$$\sum_{k=1}^{5} 2^k = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62$$

b.)

$$\sum_{k=1}^{4} 2^{-k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{1}{16} \cdot (8 + 4 + 2 + 1) = \frac{15}{16}$$

c.)

$$\sum_{j=1}^{10}(j+1) + \sum_{j=1}^{10}(2j-1) = \sum_{j=1}^{10}(j+1+2j-1) = \sum_{j=1}^{10} 3j = 3 \cdot \sum_{j=1}^{10} j$$
$$= 3 \cdot (1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)) = 3 \cdot 55 = 165$$

d.)

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{k=0}^{i} 2 \cdot i \cdot k = \sum_{i=1}^{5}\Big(\sum_{k=0}^{i}(2 \cdot i \cdot k)\Big)$$

$$\begin{aligned}
&= 2\cdot1\cdot0 \quad +2\cdot1\cdot1 \\
&\quad +2\cdot2\cdot0 \quad +2\cdot2\cdot1 \quad +2\cdot2\cdot2 \\
&\quad +2\cdot3\cdot0 \quad +2\cdot3\cdot1 \quad +2\cdot3\cdot2 \quad +2\cdot3\cdot3 \\
&\quad +2\cdot4\cdot0 \quad +2\cdot4\cdot1 \quad +2\cdot4\cdot2 \quad +2\cdot4\cdot3 \quad +2\cdot4\cdot4 \\
&\quad +2\cdot5\cdot0 \quad +2\cdot5\cdot1 \quad +2\cdot5\cdot2 \quad +2\cdot5\cdot3 \quad +2\cdot5\cdot4 \quad +2\cdot5\cdot5 \\
&= 2 \cdot (1+2+4+3+6+9+4+8+12+16+5+10+15+20+25) \\
&= 2 \cdot 140 = 280
\end{aligned}$$

e.)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=a}^{n-1} a_{i+1} = a_1 + a_2 + ... + a_n - a_1 - a_2 - ... - a_n = 0$$

Aufgabe 5

Die Zahl n hat die Dezimaldarstellung

$$n = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 10^i$$

dabei ist $k+1$ die Anzahl der Stellen von n.
Dann ist:

$$n - Q(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 10^i - \sum_{i=0}^{k} a_i = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot (\cdot 10^i - 1).$$

Für $i = 0$ ist der Summand $a_i \cdot (10^i - 1)$ Null.
Für $i \geq 1$ ist $10^i - 1$ die Zahl, deren Dezimaldarstellung aus i Neunen besteht, diese ist durch 9 teilbar.
Also ist

$$\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot (10^i - 1) = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot (10^i - 1)$$

durch 9 teilbar, denn die Summe von durch 9 teilbaren Zahlen ist selbst durch 9 teilbar