Übungsblatt 5 - Musterlösungen

Technische Hochschule Mittelhessen, Fachbereich MNI, Diskrete Mathematik, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

Bitte zeigen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion:

a.) Für $n \geq 1$ ist $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

Lösung / Beweis:

$\underline{n = 1:}$ Zu zeigen: $\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 1^2$.

Dies gilt wegen $\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = (2 \cdot 1 - 1) = 1 = 1^2$.

$\underline{n \to n+1:}$

Induktionsvoraussetzung: $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

Zu zeigen ist $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)n^2$.

Dies gilt wegen

$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)n^2$

$= \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2 \cdot (n+1) - 1)$

$= n^2 + (2 \cdot (n+1) - 1)$ (nach Induktionsvoraussetzung)

$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ q.e.d.

b.) Für $n \geq 1$ ist $3^n - 3$ durch 6 teilbar.

Lösung / Beweis:

$\underline{n = 1}$: Zu zeigen ist: $3^1 - 3$ ist durch 6 teilbar.

Dies gilt wegen $3^1 - 3 = 3 - 3 = 0$, und 0 ist durch 6 teilbar.

$\underline{n \to n+1}$

Induktionsvoraussetzung: Für ein festes $n > 1$ ist $3^n - 3$ ist durch 6 teilbar.

Zu zeigen ist: $3^{n+1} - 3$ ist durch 6 teilbar.

Dies gilt wegen:

$3^{n+1} - 3 = 3 \cdot 3^n - 3 = (3^n - 3) + 2 \cdot 3^n$

Nach Induktionsvoraussetzung ist der erste Summand, $3^n - 3$, durch 6 teilbar. Der zweite Summand, $2 \cdot 3^n$, ist ebenfalls durch 6 teilbar, denn er ist durch 2 und durch 3 teilbar.

Damit ist $3^{n+1} - 3$ eine Summe zweier Zahlen, die durch 6 teilbar sind, also ebenfalls durch 6 teilbar. q.e.d.

c.) Für $n \geq 3$ ist die Innenwinkelsumme im ebenen $n-$Eck $(n-2) \cdot 180°$. (Dass die Innenwinkelsumme im Dreieck 180° ist, kann vorausgesetzt werden).

Lösung / Beweis:

$\underline{n = 3:}$ Zu zeigen ist: Die Innenwinkelsumme im Dreieck ist $(3-2) \cdot 180°$. Dies gilt, weil die Innenwinkelsumme im Dreieck 180° ist.

$\underline{n \to n+1:}$

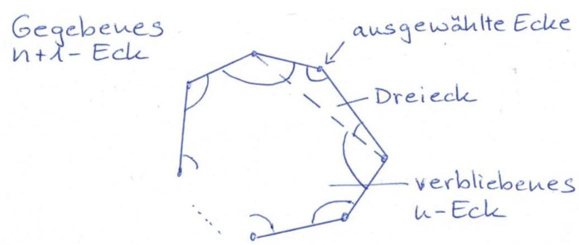
Induktionsvoraussetzung: Die Innenwinkelsumme im ebenen n-Eck ist $(n-2) \cdot 180°$.

Zu zeigen ist: Die Innenwinkelsumme im ebenen (n+1)-Eck ist $(n+1-2) \cdot 180°$, also $(n-1) \cdot 180°$.

Dies gilt aufgrund der folgenden Überlegung: Gegeben sei ein ebenes $n+1$-Eck.

Man wählt eine beliebige Ecke aus und verbindet die beiden Nachbarecken.

Dadurch das $n+1$-Eck zerlegt in ein n-Eck und ein Dreieck



Die Innenwinkelsumme des $n+1$-Eck ist die Summe aus der Innenwinkelsumme des n-Ecks und des Dreiecks (siehe Zeichnung), also nach Induktionsvoraussetzung

$(n-2) \cdot 180° + 180° = (n-1) \cdot 180° = ((n+1)-2) \cdot 180°$. q.e.d.

d.) Für $n \geq 2$ gilt: Wenn sich n Personen treffen, und jeder gibt jedem die Hand, so werden insgesamt $n \cdot (n-1)/2$ Handshakes ausgeführt.

Lösung / Beweis:

$\underline{n = 2:}$ Zu zeigen ist: Wenn sich zwei Personen treffen, und jeder gibt jedem die Hand, werden $\frac{2 \cdot 1}{2}$ Handshakes ausgeführt.

Dies gilt, weil zwei Personen genau einen Handshake ausführen, und $\frac{2 \cdot 1}{2} = 1$

$\underline{n \to n+1:}$

Induktionsvoraussetzung: Wenn sich n Personen treffen, und jeder gibt jedem die Hand, werden $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ Handshakes ausgeführt.

Zu zeigen: Wenn sich $n+1$ Personen treffen, und jeder gibt jedem die Hand, werden $\frac{(n+1) \cdot n}{2}$ Handshakes ausgeführt.

Dies sieht man wie folgt: Eine beliebige Person wird herausgegriffen.

Nun gibt es (nach Induktionsvoraussetzung) $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ Handshakes, die die anderen n Personen untereinander ausführen.

Zusätzlich gibt es die n Handshakes der ausgewählten Person.

Insgesamt also $\frac{n \cdot (n-1)}{2} + n = \frac{2n + n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ Handshakes. q.e.d.

Aufgabe 2

Bitte berechnen Sie:

a.) $13 \cdot 7 \mod 3$

Lösung:

$13 \cdot 7 \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1 \bmod 3$

b.) $12 - 5 + 184 \cdot 17 \mod 5$

Lösung:

$12 - 5 + 184 \cdot 17 \equiv 2 - 0 + 4 \cdot 2 \equiv 10 \equiv 0 \bmod 5$

c.) $a^2 - (a+b)^2 \mod b$ für $a, b \in \mathbb{N}$

Lösung:

$a^2 - (a+b)^2 \equiv a^2 - a^2 - 2ab - b^2 \equiv -2ab - b^2 \equiv 0 \bmod b$

d.) $17 \cdot 19 \mod 18$

Lösung:

$17 \cdot 19 \equiv -1 \cdot (+1) \equiv -1 \equiv 17 \bmod 18$

e.) $15^{20} \mod 16$

Lösung:

$15^{20} \equiv (-1)^{20} \equiv 1 \bmod 16$

f.) Bitte beweisen Sie für $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ mit $a \equiv b \mod m$, $c \equiv d \mod m$:
Es gilt $a \cdot c \equiv b \cdot d \mod m$.
(Wer keinen Ansatz findet, überzeuge sich davon anhand einiger Beispiele mit dreistelligen krummen Zahlen a, b, c, d, einem zweistelligen Modul m und einem Taschenrechner ;-)).

Lösung:

Es seien $q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{Z}, s, r \in \{0, ..., m-1\}$ so gewählt dass gilt:

$a = q_1 m + r, \quad b = q_2 m + r$ (r identisch, da $a \equiv b \bmod m$)

$c = q_3 m + s, \quad d = q_4 m + s$ (s identisch, da $c \equiv d \bmod m$)

Dann ist

$a \cdot c = (q_1 m + r) \cdot (q_3 m + s) = q_1 q_3 m^2 + (q_1 s + q_3 r) \cdot m + rs$

$b \cdot d = (q_2 m + r) \cdot (q_4 m + s) = q_2 q_4 m^2 + (q_2 s + q_4 r) \cdot m + rs$

Somit ist $a \cdot c \equiv b \cdot d \equiv r \cdot s \bmod m$.

Aufgabe 3

Die Modulrechnung wird angewandt, um zu prüfen, ob Zahlen richtig übertragen wurden. Wenn ein Sender die s-stellige Dezimalzahl $n = \sum_{i=0}^{s-1} a_i \cdot 10^i$ übertragen will, sendet er zusätzlich die Prüfziffer $p = -\sum_{i=0}^{s-1}(i+2)\cdot a_i \mod (s+2)$. Es gilt dann $p + \sum_{i=0}^{s-1}(i+2)\cdot a_i \equiv 0 \mod (s+2)$.

Der Empfänger berechnet dann für die Zahl $n' = \sum_{i=0}^{s-1} a'_i \cdot 10^i$ und den Wert p', die er erhalten hat, den Wert $p' + \sum_{i=0}^{s-1}(i+2)\cdot a'_i \mod (s+2)$. Ergibt dieser Wert nicht Null, ist ein Übertragungsfehler aufgetreten (die Umkehrung gilt leider nicht, Fehler können sich auch aufheben).

Bitte überprüfen Sie für die folgenden 5-stelligen Zahlen, ob die jeweilige Prüfziffer korrekt ist:

a.) $24381 - 1$ b.) $23481 - 1$

Lösung: Die korrekte Prüfziffer im Fall $s = 5$ ist

$$-(a_4 \cdot 6 + a_3 \cdot 5 + a_2 \cdot 4 + a_1 \cdot 3 + a_0 \cdot 2) \bmod 7.$$

a.) Die korrekte Prüfziffer für 24381 ist

$-(2\cdot 6 + 4\cdot 5 + 3\cdot 4 + 8\cdot 3 + 2\cdot 1) \equiv -(5+6+5+3+2) \equiv -(0) \equiv 0 \mod 7.$

Die Ziffer 1 ist also falsch.

b.) Die korrekte Prüfziffer für 23481 ist

$-(2\cdot 6 + 3\cdot 5 + 4\cdot 4 + 8\cdot 3 + 2\cdot 1) \equiv -(5+1+2+3+2) \equiv -(6) \equiv 1 \mod 7.$

Die Ziffer 1 ist also richtig.

(Ein Beispiel für $s = 9$ ist die ISBN-Nummer, findet sich in Teschl/Teschl).

Aufgabe 4

Bitte erstellen Sie die folgenden Berechnungstableaus für modulare Addition und Multiplikation:

a.) $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}, +)$ b.) $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}, \cdot)$

c.) In den Zeilen bzw. Spalten mit welchen Eingangszahlen kommt bei $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}, \cdot)$ jede Zahl aus $\{0, \dots, 8\}$ genau einmal vor?

Lösung:

a.)

$(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}, +)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8	0
2	2	3	4	5	6	7	8	0	1
3	3	4	5	6	7	8	0	1	2
4	4	5	6	7	8	0	1	2	3
5	5	6	7	8	0	1	2	3	4
6	6	7	8	0	1	2	3	4	5
7	7	8	0	1	2	3	4	5	6
8	8	0	1	2	3	4	5	6	7

b.)

$(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}, \cdot)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	2	4	6	8	1	3	5	7
3	0	3	6	0	3	6	0	3	6
4	0	4	8	3	7	2	6	1	5
5	0	5	1	6	2	7	3	8	4
6	0	6	3	0	6	3	0	6	3
7	0	7	5	3	1	8	6	4	2
8	0	8	7	6	5	4	3	2	1

c.)

In den Zeilen (bzw Spalten) mit Eingangszahlen $1, 2, 4, 5, 7, 8$. D.h., mit zu 9 teilerfremden Eingangszahlen.