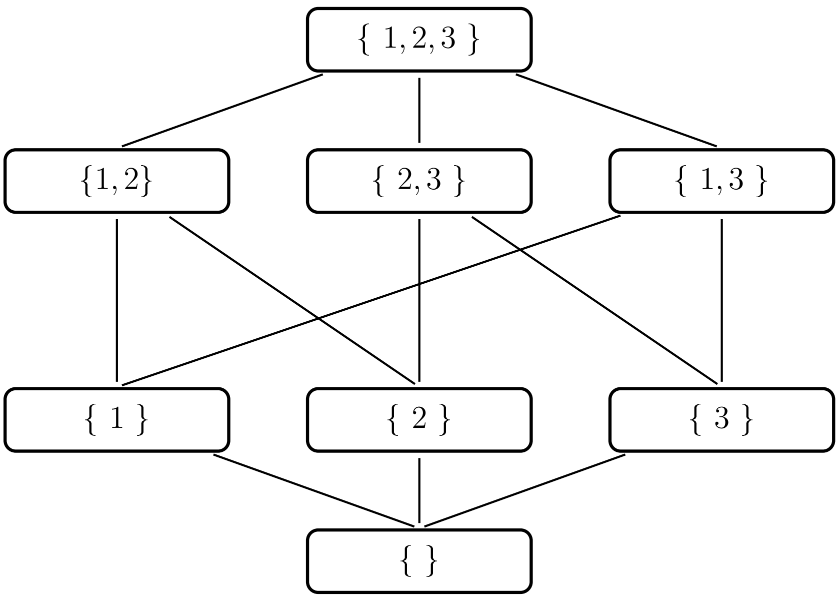
Übungsblatt 7 - Musterlösung

Technische Hochschule Mittelhessen, Fachbereich MNI, Diskrete Mathematik, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1



Aufgabe 2

a.)
"symmetrisch" bedeutet: $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$
Das ist hier nicht der Fall, denn z.B. $3 + 1 \equiv 4 \mod 5$ d.h. $(3, 4) \in R$, aber $4 + 1 \not\equiv 3 \mod 5$, also $(4, 3) \notin \mathbb{R}$
Bem: Die Relation ist sogar für kein Paar (a, b) symmetisch

b.)
$R \circ R$ besteht aus allen Paaren $(a, c) \in A \times A$, für die ein $b \in A$ existiert mit $a + 1 \equiv b \mod 5$ und $b + 1 \equiv c \mod 5$.
D.h., $R \circ R$ besteht aus allen Paaren $(a, c) \in A \times A$ mit $a + 2 \equiv c \mod 5$
$R \circ R = \{(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 0), (4, 1)\}$.

c.)
$R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 0)\}$, also ist
$R^{-1} = \{(1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (0, 4)\}$.
In Formeln ist $(a, b) \in R^{-1}$ genau dann wenn $a - 1 \equiv b \mod 5$.

Aufgabe 3

a.)
Zu zeigen sind Reflexivität, Transitivität und Symmetrie der Relation.
<u>Reflexivität:</u>
Offenbar ist $a \equiv a \mod c$.

<u>Transitivität:</u> Es sei $a \equiv b \mod c$ und $b \equiv d \mod c$.
Zu zeigen ist $a \equiv d \mod c$.
Dies gilt wegen:
$a \equiv b \mod c \Rightarrow 7$ teilt $a - b$
$b \equiv d \mod c \Rightarrow 7$ teilt $b - d$
Somit teilt 7 die Zahl $(a - b) + (b - d) = a - d$, also $a \equiv d \mod c$

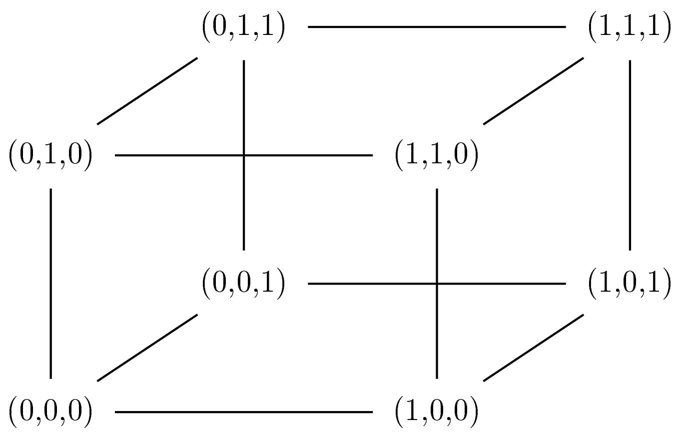
<u>Symmetrie:</u> Wenn $a \equiv b \mod c$, haben a und b den selben Rest bei Division durch c,
also ist $b \equiv a \mod c$.

b.)
Es gibt c Restklassen, weil es c mögliche Reste bei der Division durch c gibt.

c.)
Die Äquivalenzklassen sind:
$\{k \cdot c : k \in \mathbb{Z}\}$
$\{k \cdot c + 1 : k \in \mathbb{Z}\}$
$\vdots$
$\{k \cdot c + (c - 1) : k \in \mathbb{Z}\}$
Jede Äquivalenzklasse hat also die Gestalt
$[r] = \{k \cdot c + r : k \in \mathbb{Z}\}$ für ein $r \in \{0, 1, \ldots, c - 1\}$.

Aufgabe 4

a.)
Im normalen Koordinatensystem sieht der cube- sconnected cycle wie folgt aus:



b.)
Im Fall $n = 1$ besteht der cube- connected cycle aus nur zwei Punkten, dann ist die Transitivität erfüllt, denn die Aussage ist leer.
Für $n > 1$ ist der cube- connected cycle nicht transitiv. Denn wenn für $a, b, c \in \{0, 1\}^n$ die Ecken a und b verbunden sind, und b und c verbunden sind, so unterscheiden sich a und b an einer Stelle, und b und c an einer Stelle. Damit ist entweder $a = c$ oder a und c unterscheiden sich an zwei Stellen. In beiden Fällen sind a und c nicht verbunden.

c.)
Nein, denn Ordnundsrelationen und Äquivalenzrelationen sind transitiv, der cube-connected cycle nach Teil b. jedoch nicht.

Aufgabe 5

a)
R_1 ist keine Ordnungsrelation, denn R_1 erfüllt das Kriterium der Antisymmetrie nicht:
So ist z.B. $|1+i| = |1-i| = \sqrt{2}$,
also $(1+i, 1-i) \in R_1$ und $(1-i, 1+i) \in R_1$,
aber dennoch gilt $1+i \neq 1-i$.
Somit erübrigt sich die Frage nach Halbordnung oder totaler Ordnung.

b)
R_2 ist eine vollständige Ordnung. Dazu sind die Reflexivität, Transitivität, Antisymmetrie und Vollständigkeit zu zeigen:
Reflexivität:
Für jedes $a+bi \in \mathbb{C}$ ist offenbar $(a+bi,\ a+bi) \in R$.

Transitivität:
Seien $a_1+b_1 i,\ a_2+b_2 i,\ a_3+b_3 i \in \mathbb{C}$ mit $(a_1+b_1 i,\ a_2+b_2 i) \in R$ und $(a_2+b_2 i,\ a_3+b_3 i) \in R$. Dann ist $(a_1+b_1 i, a_3+b_3 i) \in R$, denn es gilt $a_1 < a_3$ oder $a_1 = a_3$ und $b_1 \leq b_3$. Das sieht man, indem man nacheinander die folgenden 4 Fälle prüft:

$a_1 = a_2$?	$a_2 = a_3$?	Ergebnis
ja $\Rightarrow b_1 \leq b_2$	ja $\Rightarrow b_2 \leq b_3$	$a_1 = a_3, b_1 \leq b_3$
ja $\Rightarrow b_1 \leq b_2$	nein $\Rightarrow a_2 < a_3$	$a_1 = a_2 < a_3 \Rightarrow a_1 < a_3$
nein $\Rightarrow a_1 < a_2$	ja $\Rightarrow b_2 \leq b_3$	$a_1 < a_2 = a_3 \Rightarrow a_1 < a_3$
nein $\Rightarrow a_1 < a_2$	nein $\Rightarrow a_2 < a_3$	$a_1 < a_2 < a_3 \Rightarrow a_1 < a_3$

Antisymmetrie:
Zu zeigen: Wenn $(a+bi,\ c+di) \in R_2$ und $(c+di,\ a+bi) \in R_2$ so ist $a+bi = c+di$.
Das gilt, denn dann ist $a = c$ (ansonsten wäre $a < c$ und $c < a$, was nicht möglich ist)
Damit muss $b \leq d$ und $d \leq b$, also $b = d$ gelten, d.h. $a+bi = c+di$

Vollständigkeit
Für $a+bi, c+di \in \mathbb{C}$ gilt:

$$
\begin{array}{ll}
 & a < c \\
\text{oder} & c < a \\
\text{oder} & a = c \text{ und } b \leq d \\
\text{oder} & a = c \text{ und } d \leq b
\end{array}
$$

Damit ist $(a+bi,\ c+di) \in R$ oder$(c+di,\ a+bi) \in R$.