Übungsblatt 9 - Musterlösung

Technische Hochschule Mittelhessen, FB MNI, Diskrete Mathematik, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

a.) 4, 8, 12, 16, 20, 24.

b.) 4, 8, 1, 5, 9, 2.

c.) 2, 3, 8, 19, 46, 111.

d.) 1, 2, 6, 24, 120, 720.

Aufgabe 2

a.) $a_n = 2^n + n^2$.
- Nach unten beschränkt, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $0 \leq 2^n + n^2$.
- Nach oben nicht beschränkt, denn für jedes $S \in \mathbb{R}$ ist (z.B.) für alle $n > [|S|]$ (nächste ganze Zahl am Betrag von S) $a_n \geq 2^S + S^2 > S$.
- Die Folge ist streng monoton wachsend. Denn es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} > a_n$, wegen $a_{n+1} = 2^{n+1} + (n+1)^2 > 2^n + n^2 = a_n$.
- Die Folge ist nicht konvergent, die Folgenglieder werden beliebig groß.

b.) $a_n = (-1)^n \cdot (1 + \frac{1}{n})$
- Die Folge ist beschränkt (nach unten und oben, denn es gilt (z.B.))

$$-2 \leq a_n \leq +2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Die Folge ist alternierend, also nicht monoton wachsend oder fallend.
- Die Folge ist nicht konvergent, die Folgenglieder springen zwischen Umgebungen der 1 und der -1 hin und her.

c.) $a_0 = 1,\ a_n = \sqrt{2 \cdot a_{n-1}^2} = \sqrt{2} \cdot a_{n-1}$
- Nach unten beschränkt durch z.B. 0, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a_n > 0$.
- Es ist $a_n = \sqrt{2}^n$.

(Beweis durch vollständige Induktion:
$n = 1\ :\ a_0 = \sqrt{2}^0$, denn $\sqrt{2}^0 = 1$
$n \to n+1$:
Induktionsvoraussetzung: $a_n = \sqrt{2}^n$.
Zu zeigen ist $a_{n+1} - \sqrt{2}^{n+1}$.
Dies folgt aus $a_n = \sqrt{2}^n$ wegen
$a_{n+1} = \sqrt{2} \cdot a_n = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}^n = \sqrt{2}^{n+1}$ q.e.d.
Somit ist a_n nach oben unbeschränkt.
- Die Folge ist streng monoton wachsend.
Denn für $n \geq 1$ ist
$a_{n+1} = \sqrt{2}^{n+1} > \sqrt{2}^n = a_n$.
- Die Folge ist nicht konvergent, die Folgenglieder werden beliebig groß.

d.) $a_n = \frac{n^2}{n^2+1}$

- Die Folge ist beschränkt, denn es ist
für alle $n \geq 0$: $0 \leq \frac{n^2}{n^2+1} \leq 1$.

(Beweis: $0 \leq \frac{n^2}{n^2+1}$ gilt, weil Zähler und Nenner positiv sind.

$\frac{n^2}{n^2+1} \leq 1$ gilt, weil der Zähler kleiner als der Nenner ist).

-Die Folge ist streng monoton wachsend.
Dazu ist $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen.
Dies gilt wegen:

$$
\begin{aligned}
& n < n+1 \\
\Rightarrow\quad & n^2 < (n+1)^2 \\
\Rightarrow\quad & n^2 \cdot (n+1)^2 + n^2 < n^2 \cdot (n+1)^2 + (n+1)^2 \\
\Rightarrow\quad & n^2 \cdot (n+1)^2 + n^2 < (n+1)^2 \cdot (n^2+1) \\
\Rightarrow\quad & n^2 \cdot ((n+1)^2 + 1) < (n+1)^2 \cdot (n^2+1) \\
\Rightarrow\quad & \frac{n^2}{(n+1)^2} < \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1}
\end{aligned}
$$

- Die Folge ist konvergent gegen 1.

e.) $a_n = n \cdot (\frac{1}{3})^2 = \frac{n}{3^n}$

- Folge ist beschränkt, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $0 \leq \frac{n}{3^n} \leq 1$
(Erste Ungleichung, weil Zähler und Nenner positiv.
Zweite Ungleichung weil $n \leq 3^n$.
Folge ist weder monton wachsend noch fallend.
Denn es ist $a_0 < a_1$ (wegen $0 < \frac{1}{3}$), aber $a_1 > a_2$ (wegen $\frac{1}{3} > \frac{2}{9}$).
- Die Folge ist eine Nullfolge, die Folgenglieder sind stets positiv, werden aber beliebig klein.

Aufgabe 3

a.) Eine n-Bit-Folge enthält genau dann keine zwei aufeinanderfolgenden Nullen, wenn gilt:

i.) Entweder ihr n-tes Bit ist 1 und die ersten $n-1$ Bits enthalten keine zwei aufeinander folgenden Nullen, oder

ii.) ihr n-tes Bit ist 0, das $n-1$-te Bit ist 1 und die ersten $n-2$ Bits enthalen keine zwei aufeinanderfolgenden Nullen.

Die Zahl der Möglichkeiten aus i.) ist a_{n-1}, die aus ii.) ist a_{n-2}.

Also ist $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

b.) Jede Pflasterung eines Rechtecks mit 2 Zeilen und n Spalten mit Dominosteinen erfüllt:

i.) Entweder die letzte Spalte wird durch einen senkrechten Dominostein bedeckt, oder

ii.) die letzten beiden Spalten werden durch zwei waagrechte Dominosteine bedeckt.

Die Zahl der Möglichkeiten aus i.) ist a_{n-1}, die aus ii.) ist a_{n-2}.

Also ist $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

c.) Beweis durch vollständige Induktion:

$n = 1$: Zu zeigen ist $T_1 = 2^1 - 1$.
Dies gilt wegen $2^1 - 1 = 1$ und $T_1 = 1$ nach Definition.

$n \to n+1$:
Induktionsvoraussetzung: $T_n = 2^n - 1$.
Zu zeigen ist: $T_{n+1} = 2^{n+1} - 1$.
Dies gilt wegen

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= 2 \cdot T_n + 1 && \text{(nach Definition)} \\ &= 2 \cdot (2^n - 1) + 1 && \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &= 2 \cdot 2^n - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1 && \blacksquare \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Vorarbeit: Die Seitenlängen der Quadrate sind 1, 1/2, 1/4, 1/8.... Das i-te Quadrat hat also Seitenlänge $S_i = 2/2^i = 1/2^{i-1}$ für $i = 1, 2, 3, \ldots.$

a.) Die Fläche F_i ist $(S_i)^2 = (2/2^i)^2 = 4/4^i = 1/4^{i-1}$, der Umfang U_i ist $4 \cdot S_i = 4 \cdot 2/2^i = 4/2^{i-1}$ für $i = 1, 2, 3, \ldots.$

b.) Die Summe der Flächen bis inclusive des zehnten Quadrates ist

$$\sum_{i=1}^{10} F_i = \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{4^{i-1}} = \sum_{i=0}^{9} \frac{1}{4^i} = \frac{1-(1/4)^{10}}{1-(1/4)} = \frac{1-(1/4)^{10}}{(3/4)} = \frac{4}{3} \cdot (1-(1/4)^{10}).$$

Dabei wurde die Summenformel für die endliche geometrische Reihe mit $q = 1/4$ benutzt, die für alle $q \neq 0$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

c.) Die Summe aller Flächen ist 4/3. Man erhält sie, indem man in der Berechnung aus c die Summenformel für die unendliche geometrische Reihe benutzt, die für alle q mit $0 < q < 1$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

d.) Die Summe aller Umfänge ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} U_i = \sum_{i=1}^{\infty} 4 \cdot 2/2^i = 4 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} = 4 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{4}{1-(1/2)} = \frac{4}{1/2} = 8.$$

Hierbei wurde die Formel für die unendliche geometrische Reihe mit $q = 1/2$ benutzt.

Aufgabe 5

a.)

- Zunächst wird gezeigt $\frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

  Dies gilt wegen:
  $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k\cdot(k+1)} = \frac{1}{k\cdot(k+1)}$

  Somit ist $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k\cdot(k+1)}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

- Nun wird für alle $n \in \mathbb{N}$ folgende Formel für die n-te Partialsumme gezeigt:

  $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k\cdot(k+1)}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$

- Beweis durch vollständige Induktion nach n
  $\underline{n = 1}$: Zu zeigen ist $\sum_{k=1}^{1}\left(\frac{1}{k\cdot(k+1)}\right) = 1 - \frac{1}{1+1}$

  Dies gilt wegen:
  $\sum_{k=1}^{1}\left(\frac{1}{k\cdot(k+1)}\right) = \frac{1}{1\cdot(1+1)} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$

  $\underline{n \to n+1}$:

  Induktionsvorraussetzung $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k\cdot(k+1)}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$

  Zu zeigen ist $\sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{1}{k\cdot(k+1)}\right) = 1 - \frac{1}{n+2}$

  Dies gilt wegen:
  $\sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{1}{k\cdot(k+1)}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k\cdot(k+1)}\right) + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}$
  = (nach Induktionsvorraussetzung und Hinweis i. angewandt auf $k = n+1$)
  $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = 1 - \frac{1}{n+2}$ qed.

b.) Wenn n groß wird, nähert sich $1 - \frac{1}{n+1}$ dem Wert 1 an, da $\frac{1}{n+1}$ gegen Null geht.

Aufgabe 6

- Es handelt sich um eine Ordnungsrelation. Denn die Relation ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv, wie im Folgenden gezeigt wird.

  Reflexivität: Zu zeigen ist, dass jede Folge (a_n) in Relation mit sich selbst steht. Das bedeutet, dass jedes Folgenglied a_n erfüllt: $a_n \geq a_n$. Das ist offensichtlich der Fall (jede reelle Zahl ist größer oder gleich sie selbst).

  Antisymmetrie: Zu zeigen ist: Wenn $(a_n)\ R\ (b_n)$ und $(b_n)\ R\ (a_n)$, so sind beide Folgen identisch.
  Dies gilt, denn ist $(a_n)\ R\ (b_n)$ und $(b_n)\ R\ (a_n)$, so ist definitionsgemäß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ zugleich erfüllt $a_n \geq b_n$ und $b_n \geq a_n$, also ist $a_n = b_n$ für alle n. Somit sind die Folgen dann identisch.

  Transitivität: Es seien $(a_n), (b_n)$ und (c_n) Folgen mit $(a_n)\ R\ (b_n)$ und $(b_n)\ R\ (c_n)$. Zu zeigen ist, dass dann auch $(a_n)\ R\ (c_n)$, dass also für alle Folgenglieder gilt: $a_n \geq c_n$. Dies gilt, denn wenn $(a_n)\ R\ (b_n)$ und $(b_n)\ R\ (c_n)$, so ist für alle Folgenglieder sowohl $a_n \geq b_n$ als auch $b_n \geq c_n$, also (wegen der Transitivität in $\mathbb{R}$) auch $a_n \geq c_n$.

- Die Ordnungsrelation ist nicht vollständig, denn es gibt Folgen (a_n) und (b_n), die nicht miteinander verglichen werden können - für die also weder $(a_n)\ R\ (b_n)$ noch $(b_n)\ R\ (a_n)$ gilt.
  Ein Beispiel bilden die Folgen $(a_n) = 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...$ und $(b_n) = 0, 1, 0, 1, 0, 1, ...$
  (Es gibt Unmengen weiterer Beispiele).

Aufgabe 7

☺ Keine Musterlösung für Aufgabe 4. ☺