

## Übungsblatt 9

Technische Hochschule Mittelhessen, Fachbereich MNI, Diskrete Mathematik, Prof. Dr. B. Just

### Aufgabe 1

Bitte berechnen Sie die ersten 6 Folgenglieder der Folgen:

- a.) Für  $n \geq 1$  :  $a_n = 4n$ .
- b.) Für  $n \geq 1$  :  $b_n \equiv 4n \pmod{11}$ .
- c.)  $c_0 = 2$ ,  $c_1 = 3$ , und für  $n \geq 2$  :  $c_n = c_{n-1} + 2 \cdot c_{n-2}$ .
- d.)  $d_1 = 1$ , und für  $n \geq 2$  :  $d_n = n \cdot d_{n-1}$ .

### Aufgabe 2

Bitte entscheiden Sie für die folgenden Folgen  $(a_n)$ , ob sie

- nach oben oder unten beschränkt bzw. beschränkt sind
- (streng) monoton wachsend oder fallend sind
- konvergent sind (wenn ja, gegen welchen Grenzwert?)

- a.)  $a_n = 2^n + n^2$ .
- b.)  $a_n = (-1)^n \cdot (1 + \frac{1}{n})$ ,  $n \geq 1$ .
- c.)  $a_0 = 1$ ,  $a_n = \sqrt{2 \cdot a_{n-1}^2}$ .
- d.)  $a_n = \frac{n^2}{n^2+1}$ .
- e.)  $a_n = n \cdot (1/3)^n$ .

### Aufgabe 3

a.) Für  $n \geq 1$  sei  $a_n$  die Anzahl der 0-1-Folgen der Länge  $n$ , die keine zwei aufeinanderfolgenden Nullen enthalten. Bitte begründen Sie für  $n \geq 3$  die Rekursionsgleichung  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ .

b.) Für  $n \geq 1$  sei  $b_n$  die Anzahl der möglichen Pflasterungen eines  $2 \times n$ -Rechtecks mit  $2 \times 1$ -Dominosteinen. Bitte begründen Sie für  $n \geq 3$  die Rekursionsgleichung  $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$ .

c.) Es sei  $T_1 = 1$  und für  $n \geq 1$  sei  $T_n = 2 \cdot T_{n-1} + 1$ . Bitte zeigen Sie durch vollständige Induktion (auf geht's!) die Formel  $T_n = 2^n - 1$ .  
( $T_n$  ist übrigens die Anzahl der Züge, die es bei den Türmen von Hanoi braucht, um einen Turm der Höhe  $n$  von einer Position auf die andere zu bewegen).

... bitte wenden, auf der Rückseite sind noch Aufgaben ...

## Aufgabe 4

Betrachtet wird eine Folge von Quadraten  $Q_1, Q_2, \dots$ . Das erste hat Seitenlänge 1, und dann hat das nächste jeweils die halbe Seitenlänge des vorhergehenden.

- Was ist die Fläche  $F_i$  und der Umfang  $U_i$  des  $i$ -ten Quadrats,  $i \in \mathbb{N}$ ?
- Was ist die Summe der Flächen bis inclusive des zehnten Quadrats?
- Was ist die Summe aller Flächen?
- Was ist die Summe aller Umfänge?

## Aufgabe 5

- Bitte berechnen Sie die Partialsummen der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k+1)}$$

Hinweise:

- Zeigen Sie zunächst  $\frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ .
  - Die Formel für die Partialsummen finden Sie, indem Sie die ersten ausrechnen, das liefert die richtige Idee.
  - Beweis der Formel für die Partialsummen mit vollständiger Induktion, am besten mit der Darstellung aus i.).
- Welchem Wert nähert sich die Folge der Partialsummen an, wenn  $n$  sehr groß wird?

## Aufgabe 6

Auf der Menge aller Folgen wird eine Relation  $R$  definiert. Es ist  $(a_n) R (b_n)$  definitionsgemäß dann, wenn jedes Folgenglied von  $(a_n)$  größer oder gleich dem entsprechenden Folgenglied von  $(b_n)$  ist, d.h., wenn gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n \geq b_n.$$

Handelt es sich um eine Ordnungsrelation? Wenn ja, ist die Ordnung vollständig?

## Aufgabe 7

Aufforderung zum Spielen mit Folgen aus natürlichen Zahlen im Internet :-).

- Es gibt ein wissenschaftliches Journal "Journal of Integer Sequences", das sich ausschließlich mit Resultaten den Eigenschaften von Zahlenfolgen aus natürlichen Zahlen beschäftigt: <https://www.cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/> .  
Bitte wählen Sie unten auf der Seite einen beliebigen Band des Journals, und dann einen beliebigen Artikel aus. Überzeugen Sie sich, dass mathematische wissenschaftliche Texte mehr Worte als Formeln enthalten. (Hinweis: Es ist nicht erforderlich, den Artikel durchzuarbeiten ...).
- Da Zahlenfolgen aus natürlichen Zahlen so eine große Rolle in der Kryptographie und Graphentheorie spielen, gibt es eine Datenbank, die jeder bekannten sinnvollen Zahlenfolge eine Kennnummer zuordnet, ihre Eigenschaften listet und Querverbindungen zu anderen Zahlenfolgen herstellt: <http://oeis.org/?language=german>  
Bitte werfen Sie mal einen Blick hinein, vielleicht mit dem Suchbegriff "Fibonacci" oder mit 5 Zahlen als Input im Eingabefeld, die Ihnen gerade in den Sinn kommen :-).

**Viel Spass und Erfolg!**