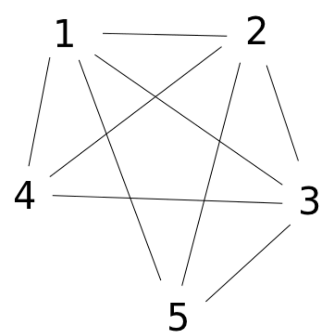
Übung 11 - Musterlösung

Technische Hochschule Mittelhessen, Fachbereich MNI, Diskrete Mathematik, Prof. Dr. B. Just

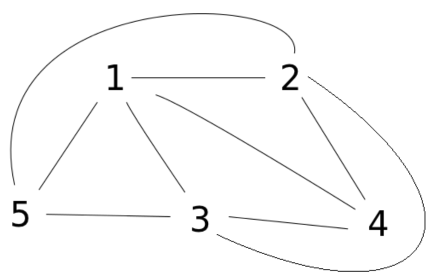
Aufgabe 1

a.) Eine mögliche Lösung ist die folgende:

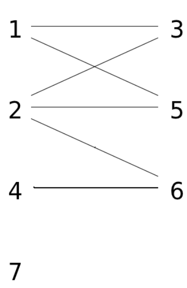


(andere Lösungen sind auch möglich)

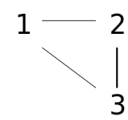
b.) Ist planar, weil z.B. folgende ebene Einbettung existiert:



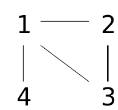
c.) Ist bipartit, weil alle Kanten zwischen den nichtleeren Knotenmengen $\{1, 2, 4, 7\}$ und $\{3, 5, 6\}$ verlaufen. (Alternativ: zwischen $\{1, 2, 4\}$ und $\{3, 5, 6, 7\}$).



d.) Ist nicht bipartit, weil:
Angenommen, der Graph wäre bipartit.
Dann könnte man die Knoten $1, 2$ und 3 so in zwei Mengen unterteilen, dass keine Menge adjazente Knoten enthält. In einer der Mengen ist Knoten 1.
Knoten 2 und 3 müssen in der anderen Menge sein, da 1 adjazent zu 2 und 3 ist.
Das ist ein Widerspruch, da 2 und 3 adjazent sind.
Also ist der Graph nicht bipartit.



e.) Ist nicht bipartit, weil nach Teil d. schon die Knoten $1, 2, 3$ nicht in zwei Teilmengen mit nicht-adjazenten Knoten zerlegt werden können, also erst recht nicht die Knoten $1, 2, 3, 4$.



Aufgabe 2

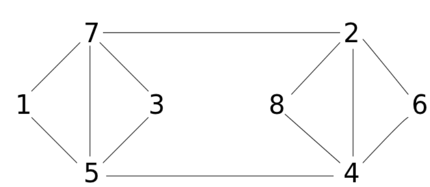
a.) Adjazenzmatrix:

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

b.) 2 Zusammenhangskomponenten:
$\{1, 3, 5, 7\}$ und $\{2, 4, 6, 8\}$

c.) Nein, es gibt keinen geschlossenen Kantenzug, der jede Kante genau einmal enthält. Denn jeder geschlossene Kantenzug enthält nur Kanten aus der einen oder aus der anderen Zusammenhangskomponente. Also kann er nicht alle Kanten enthalten.

d.)



Pfad (z.B.): $1, 7, 3, 5, 7, 2, 4, 8, 2, 6, 4, 5, 1$, oder: $1, 7, 2, 8, 4, 2, 6, 4, 5, 3, 7, 5, 1$

Aufgabe 3

Eigenschaften einer Äquivalenrelation:
Reflexivität, Symmetrie, Transitivität

1. **Reflexivität:**
   Jeder Knoten steht zu sich selbst in Relation.
   Denn der Kantenzug der Länge 0 verbindet ihn mit sich selbst - jeder Knoten ist in seiner Zusammenhangskomponente.

2. **Symmetrie:**
   Es sei $v_i \neq v_j$, und $(v_i, v_j) \in R$.
   Zu zeigen ist, dass auch $(v_j, v_i) \in R$ ist.
   Dazu: Wegen $(v_i, v_j) \in \mathbb{R}$ existiert ein Kantenzug $v_i, v_{k_1}, ..., v_{k_r}, v_j$ von v_i nach v_j mit $k_1, ..., k_r \in \{1, ..., n\}$.
   Dann ist der umgekehrte Kantenzug $v_j, v_{k_r}, v_{k_{n-1}}, ..., v_{k_1}, v_i$ ein Kantenzug von v_j nach v_i, also $(v_j, v_i) \in R$.

3. **Transitivität:**
   Es seien $(v_i, v_j) \in \mathbb{R}$ und $(v_j, v_k) \in R$.
   Zu zeigen ist $(v_i, v_k) \in R$.
   Dies gilt, denn ist $v_i, v_{k_1}, ..., v_{k_r}, v_j$ ein Kantenzug von v_i nach v_j, und $v_j, v_{s_1}, ..., v_{s_t}, v_k$ ein Kantenzug von v_j nach v_k, so ist $v_i, v_{k_1}, ..., v_{k_r}, v_j, v_{s_1}, ..., v_{s_t}, v_k$ ein Kantenzug von v_i nach v_k (erst von v_i nach v_j, dann von v_j nach v_k). Dabei sind $v_{k_1}, ..., v_{k_r}, v_{s_1}, ..., v_{s_t} \in \{1...n\}$.

Aufgabe 4

$\underline{n = 1}$: Behauptung : Der vollständige Graph mit einem Knoten hat $1 \cdot (1-1)/2$ Kanten.

Das gilt wegen:

De vollständige Graph mit einem Knoten hat keine Kante, und $1 \cdot (1-1)/2 = 0$.

$\underline{n \to n+1}$:

Induktionsvoraussetzung - für ein beliebiges, aber festes n:

Der vollständige Graph mit n Knoten hat $n \cdot (n-1)/2$ Kanten.

Zu zeigen ist:

Der vollständige Graph mit $n+1$ Knoten hat (dann) $(n+1) \cdot (n+1-1)/2$ Kanten

Das gilt wegen :

Gegeben sei ein vollständiger Graph mit $n+1$ Knoten.

Ein Knoten und seine n inzidenten Kanten werden entfernt.

Es verbleibt ein vollständiger Graph mit n Knoten. Dieser hat nach Induktionsvoraussetzung $n \cdot (n-1)/2$ Kanten.

Der vollständige Graph mit $n+1$ Knoten hatte also die folgende Anzahl von Kanten:

$$\begin{aligned} n + \frac{n \cdot (n-1)}{2} &= \frac{2n + n \cdot (n-1)}{2} = \frac{n^2 + 2n - n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} \\ &= \frac{(n+1) \cdot n}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+1-1)}{2} \qquad \text{qed.} \end{aligned}$$