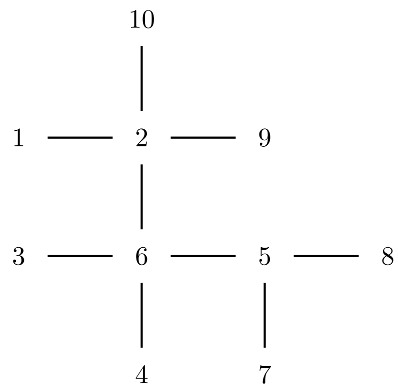
Übungsblatt 12 - Musterlösung

Technische Hochschule Mittelhessen, Fachbereich MNI, Diskrete Mathematik, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

a.)
Der Graph ist ein Baum, denn er ist zusammenhängend und enthält keinen Kreis:

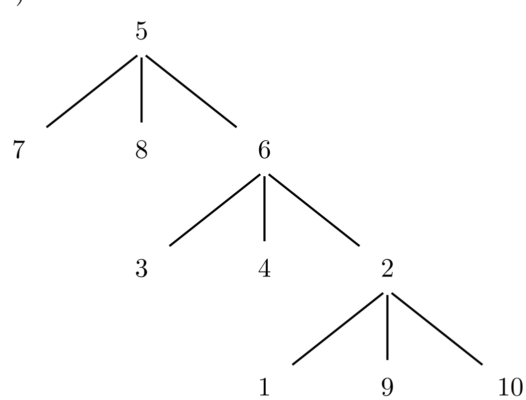


Innere Knoten sind $2, 5$ und 6
Blätter sind $1, 3, 4, 7, 8, 9, 10$.

b.)
Der Graph ist kein Baum, denn er enthält den Kreis $5 - 7 - 8 - 5$.

Aufgabe 2

a.)



(andere Darstellungen sind möglich:
Die Reihenfolge, in der Nachfolger von links nach rechts angeordnet werden, ist beliebig)

b.)
Nachfolger von 2 sind $1, 9, 10$

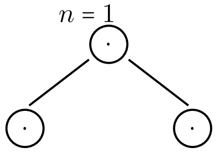
c.)
Der längste Pfad hat die Länge 3
(vom Knoten 5 zu den Knoten $1, 9$ oder 10)

Aufgabe 3

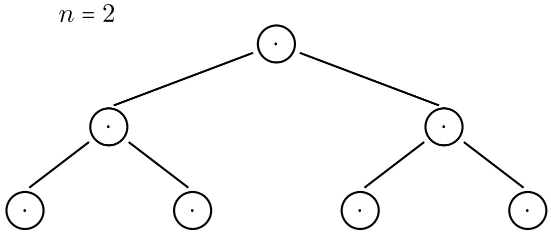
a.)

$n = 0$

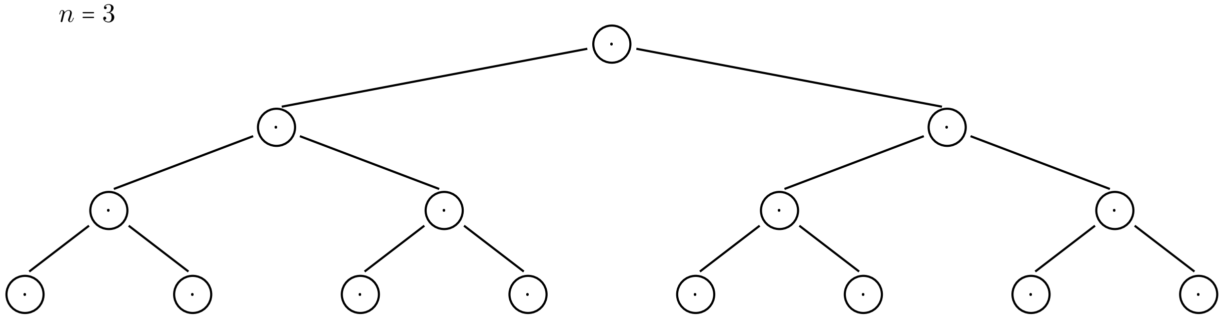
$n = 1$



$n = 2$



$n = 3$



b.) $n = 0$:
zu zeigen: Der vollständige binäre Baum der Tiefe 0 hat $2^0 - 1 = 0$ innere Knoten und $2^0 = 1$ Blätter.
Dies gilt wegen: Offensichtlich, der Baum besteht nur aus einem Knoten und keiner Kante.

$n \to n + 1$:
Induktionsvorraussetzung:
Der vollständige binäre Baum der Tiefe n, B_n, hat $2^n - 1$ innere Knoten und 2^n Blätter

Zu zeigen: Der vollständige binäre Baum der Tiefe $n + 1, B_{n+1}$ hat $2^{n+1} - 1$ innere Knoten und 2^{n+1} Blätter

Dies gilt, denn:

Aussage für innere Knoten:

B_{n+1} entsteht aus B_n, indem jedes Blatt von B_n zwei Nachfolger bekommt.
Damit ist jeder Knoten von B_n ein innerer Knoten von B_{n+1}
Die Zahl der inneren Knoten von B_{n+1} ist also:

$$\text{die Zahl der inneren Knoten von } B_n \;+\; \text{die Zahl der Blätter von } B_n.$$

Dies ist nach Induktionsvorraussetzung: $2^n - 1 + 2^n = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$

Aussage für Blätter:

Die Zahl der Blätter von $B_n + 1$ ist das Doppelte der Zahl der Blätter von B_n, weil aus jedem Blatt von B_n zwei Blätter von B_{n+1} werden.
Also nach der Induktionsvorraussetzung $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ qed.

Aufgabe 4

a) Knoten 4 in G_1 ist isoliert, aber in G_2 gibt es keinn isolierten Knoten.
Also kann es keine bijektive Abbildung $f : \{1,2,3,4\} \to \{A,B,C,D\}$ geben mit

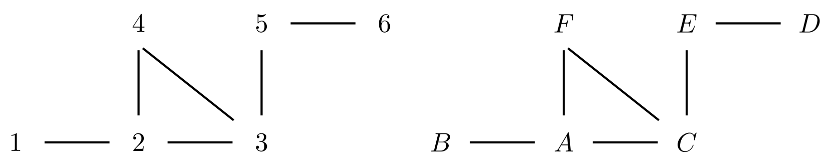
$$\{x,y\} \text{ Kante in } G_1 \Leftrightarrow \{f(x),f(y)\} \text{ Kante in } G_2.$$

Denn $f(4)$ ist nicht isoliert in G_2

Alternative:
G_1 hat 3 Kanten, G_2 hat 4 Kanten. Also kann es keine bijektive Abbildung $f : \{1,2,3,4\} \to \{A,B,C,D\}$ geben mit

$$\{x,y\} \text{ Kante in } G_1 \Leftrightarrow \{f(x),f(y)\} \text{ Kante in } G_2.$$

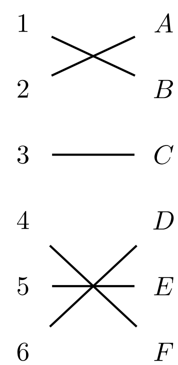
b.)



(Andere Darstellungen sind möglich. So kann man die Isomorphie aber sehr gut erkennen)

c.)

$f(1) = B$
$f(2) = A$
$f(3) = C$
$f(4) = F$
$f(5) = E$
$f(6) = D$



Ersetzt man in der Adjazenzliste von G_1 jedes $x \in \{1,2,3,4,5,6\}$ durch $f(x)$, so erhält man zunächst

Knoten	benachbarte Knoten
B	A
A	B,C,F
C	A,F,E
F	A,C
E	C,D
D	E

sortiert man die Zeilen der Adjazenzliste dann nach der ersten Spalte so erhält man

Knoten	benachbarte Knoten
A	B,C,F
B	A
C	A,F,E
D	E
E	C,D
F	A,C

Das ist die Adjazenzliste von G_2. Die Graphen können so durch Umbenennung der Knoten ineinander überführt werden.