Übungsblatt 12

Technische Hochschule Mittelhessen, Fachbereich MNI, Diskrete Mathematik, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

Die folgenden Graphen sind durch ihre Adjazenzlisten gegeben. Bitte entscheiden Sie (mit Begründung), ob die Graphen Bäume sind, und geben Sie gegebenenfalls die inneren Knoten und die Blätter an.

a.)

Knoten	benachbarte Knoten
1	2
2	1, 6, 9, 10
3	6
4	6
5	6, 7, 8
6	2, 3, 4, 5
7	5
8	5
9	2
10	2

b.)

Knoten	benachbarte Knoten
1	2
2	1, 9, 10
3	6
4	6
5	6, 7, 8
6	3, 4, 5
7	5, 8
8	5, 7
9	2
10	2

Aufgabe 2

In dem Graphen aus Aufgabe 1 a. wird der Knoten 5 als Wurzel ausgezeichnet (woraus man in einer nichtmathematischen Argumentation für Aufgabe 1 a schließen kann, dass es sich um einen Baum handeln musste ;)).

a.) Bitte zeichnen Sie den Baum als Wurzelbaum (d.h., Wurzel oben, Pfade nach unten).

b.) Bitte geben Sie alle Nachfolger des Knotens 2 und den Vorgänger des Knotens 2 an.

c.) Wie lang ist der längste Pfad von der Wurzel zu einem Blatt?

Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$. Betrachtet wird ein Wurzelbaum, bei dem jeder innere Knoten genau zwei Nachfolger hat, und bei dem die Pfadlänge von der Wurzel zu jedem Blatt n ist (ein sogenannter vollständiger binärer Baum der Tiefe n).

a.) Bitte zeichnen Sie den Baum für $n = 0, 1, 2, 3$. (Bezeichnung der Knoten nicht erforderlich).

b.) Bitte zeigen Sie durch vollständige Induktion nach n für $n \geq 0$:
Der Baum hat $2^n - 1$ innere Knoten, und 2^n Blätter.

.... auf der Rückseite ist noch eine Aufgabe

Aufgabe 4

Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ heißen isomorph, wenn sie gleich sind oder sich nur in der Benennung ihrer Knoten unterscheiden. Exakter formuliert sind zwei Graphen isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung $f : V \longrightarrow V'$ gibt, sodass gilt:

$$\{x, y\} \in E \Longleftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E'.$$

a.) Die folgenden beiden Graphen sind nicht isomorph. Warum nicht?

G_1:

Knoten	benachbarte Knoten
1	2, 3
2	3, 1
3	1, 2
4	

G_2:

Knoten	benachbarte Knoten
A	B, D
B	A, C
C	B, D
D	A, C

b.) Die folgenden beiden Graphen sind isomorph. Bitte zeichnen Sie die Graphen.

G_1:

Knoten	benachbarte Knoten
1	2
2	1, 3, 4
3	2, 4, 5
4	2, 3
5	3, 6
6	5

G_2:

Knoten	benachbarte Knoten
A	B, C, F
B	A
C	A, F, E
D	E
E	C, D
F	A, C

c.) Bitte geben Sie eine Bijektion $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{A, B, C, D, E, F\}$ für die Graphen aus Teil b. an, die auch sämtliche Kanten aufeinander abbildet (d.h., für die gilt: {x,y} ist eine Kante von G_1 genau dann, wenn $\{f(x), f(y)\}$ eine Kante von G_2 ist).

Viel Spass und Erfolg!