

Übungsblatt 1 + 2

Technische Hochschule Mittelhessen, Mathematik 2 für EI, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

Die folgende Internet-Adresse bietet die Möglichkeit, Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zu visualisieren und von unterschiedlichen Seiten zu betrachten:

<https://academo.org/demos/3d-surface-plotter/>

Bitte nehmen Sie sich 15 bis 30 Minuten Zeit, lassen Sie Ihre Phantasie spielen und experimentieren Sie mit den Funktionen, die Ihnen einfallen.

Aufgabe 2

Bitte zeichnen Sie die folgenden Niveaulinien:

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y$, Niveaulinien zu $c \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sin x$, Niveaulinien zu $c \in \{-1, 0, 1\}$.

Aufgabe 3

Bitte bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen erster Ordnung von

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^{xy}/x$
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(r, h) = \pi r^2 h$ (Volumen eines Zylinders mit Radius r und Höhe h)
- $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(r, \varphi, t) = 3 \cdot r \cdot t \cdot e^{r\varphi}$

Aufgabe 4

(Verifikation des Satzes von Schwarz):

- Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = 2z^2 e^{3xy} \cdot \sin(z)$. Bitte bestimmen Sie die partiellen Ableitungen vierter Ordnung f_{xxyz} und f_{zxyx} . Beide müssten lt. Satz von Schwarz übereinstimmen.
- Bitte denken Sie sich selbst für ein selbstgewähltes n eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ aus und verifizieren Sie an ihr den Satz von Schwarz am Beispiel einer partiellen Ableitung höherer Ordnung.

Aufgabe 5

Bitte bestimmen Sie die Tangentialebene in P in Koordinatenform:

$$f(x, y) = 3 \cdot x / \sqrt{y} + 2 \cdot \cos(\pi(x + 2y)), \quad P = (2; 1; ?).$$

Aufgabe 6

Das vollständige Differential (oder totale Differential) df einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert als

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n .$$

Ist z.B. $f(x, y) = 3x^2y + \sin y$, so ist $df = 6xy \, dx + (3x^2 + \cos y) \, dy$.

Bitte bestimmen Sie das totale Differential der folgenden Funktionen:

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^{xy}/x$
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(r, h) = \pi r^2 h$ (Volumen eines Zylinders mit Radius r und Höhe h)
- $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(r, \varphi, t) = 3 \cdot r \cdot t \cdot e^{r\varphi}$

Unterschied zu Aufgabe 2? Die partiellen Ableitungen aus Aufgabe 2 sind wie die Ausgangsfunktion selbst wieder Funktionen. Dagegen ist das totale Differential ein formaler Ausdruck, der bei der Linearisierung einer Funktion und bei der Fehlerrechnung zum Einsatz kommt.

Viel Spass und Erfolg!