Übungsblatt 3 - Musterlösung

TH Mittelhessen, Mathematik 2 für EI, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

a.)

$$f(x,y,z) = -x^2y^2 - x^2 - y^2 - \frac{z^3}{3} + \frac{3z^2}{2} - 2z - 1 \; .$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2xy^2 - 2x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x^2y - 2y$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = -z^2 + 3z - 2$$

Hesse-Martix

$$H = \begin{pmatrix} -2y^2-2 & -4xy & 0 \\ -4xy & -2x^2-2 & 0 \\ 0 & 0 & -2z+3 \end{pmatrix}$$

Alle partiellen Ableitungen sind 0 bei $P_1 = (0,0,1)$ und $P_2 = (0,0,2)$.
(Analytisch, oder Tachenrechner, oder online "numerische Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme", z.B. bei www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/gleichungssysteme2.htm).

Nun wird mit den linken oberen Determinanten der Hesse-Matrix geprüft, ob Maxima oder Minima vorliegen.

linke obere Determinante	bei $(0,0,1)$	bei $(0,0,2)$	$(0,0,1)$	$(0,0,2)$
$\det(-2y^2-2)$	$= \det(-2)$	$= \det(-2)$	$-2 < 0$	$-2 < 0$
$\det\begin{pmatrix} -2y^2-2 & -4xy \\ -4xy & -2x^2-2 \end{pmatrix}$	$= \det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	$= \det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	$4 > 0$	$4 > 0$
det H	$= \det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$= \det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$4 > 0$	$-4 < 0$
			kein Extremum	*lokales Maximum*

Bei $(0,0,1)$ liegt kein Extremum vor, da weder alle Determinanten positiv sind, noch die Folge der Determinanten negativ beginnend alternierend ist.
Bei $(0,0,2)$ liegt ein lokales Maximum vor, weil die Folge der Determinanten negativ beginnend alternierend ist.

b.)

$$f(x,y) = x \cdot y - \frac{27}{x} + \frac{27}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + \frac{27}{x^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{27}{y^2}$$

Hesse- Matrix

$$\begin{pmatrix} -54/x^3 & 1 \\ 1 & 54/y^3 \end{pmatrix}$$

Alle partiellen Ableitungen 0 bei $(x,y) = (3; -3)$ (auflösen und einsetzen, Taschenrechner oder Internet).
erste linke obere Determinante:

$$-\frac{54}{x^3} = -\frac{54}{27} = -2 < 0$$

zweite linke obere Determinante:

$$-\frac{54}{x^3} \cdot \frac{54}{y^3} - 1 = -\frac{54 \cdot 54}{27 \cdot (-27)} - 1 = 4 - 1 = 3 > 0$$

Determinanten negativ beginnend alternierend => lokales Maximum bei (x,y) = (3,-3)

c.)

$f(x,y,z) = x^2 + y + z$, Nebenbedingung $x^2 - y^2 - z^2 = 1 => x^2 = 1 + y^2 + z^2$

Gesucht sind also die lokalen Extrema von

$w(y,z) = f(x,y,z) = (1 + y^2 + z^2) + y + z$
$= 1 + y^2 + z^2 + y + z$

w ist die Restriktion von f auf die Nebenbedingung.

$\frac{\partial w}{\partial y} = 2y + 1$

$\frac{\partial w}{\partial z} = 2z + 1$

Hesse-Matrix

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Beide partiellen Ableitungen sind 0 bei $(y,z) = (-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$
Dort sind die beiden linken oberen Determinanten der Hesse-Matrix positiv:
$\det(2) = 2 > 0$ und $\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0$
w(y,z) hat also ein lokales Minimum bei $(y,z) = (-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$
Nach Nebenbedingung gilt für die x-Koordinate

$$x^2 = 1 + y^2 + z^2 = 1 + (-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2 = 1,5 => x = \pm\sqrt{1,5}$$

Die Funktion f hat also unter der Nebenbedingung $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ ein lokales Minimum bei $(x,y,z) = (\pm\sqrt{1,5}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$
Der Funktionswert ist dort
$f((\pm\sqrt{1,5}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})) = 1,5 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

d.)

Hier gibt es keine Musterlösung ;)

Aufgabe 2

a.)

$$f(x,y) = x^2 \cdot y \cdot \ln y$$
$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2xy \cdot \ln y, x^2 \ln y + x^2)$$
$$P = (3, e)$$
$$\text{grad } f(P) = (2 \cdot 3 \cdot e \cdot \ln e, 3^2 \cdot \ln e + 3^2)$$
$$= (6e, 18)\ .$$

Der steilste Anstieg der Funktion geht in Richtung $x = 6e$, $y = 18$

b)

$$f(x,t) = \sin(x) + \sin(t),\ \ P = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$
$$\text{grad } f = (\cos(x), \cos(t))$$
$$\text{grad } f(P) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \cos(\pi)\right) = (0, -1)$$

Der steilste Anstieg geht in Richtung $x = 0,\ y = -1$, d.h. entlang der negativen y-Achse.

c)

$$f(x,y,z,t) = \sin(x) \cdot \cos(y) + z^2 \cdot t + e^t,\ \ P = (1,2,3,2)$$
$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)$$
$$= (\cos(x)\cos(y), -\sin(x)\sin(y), 2zt, z^2 + e^t)$$
$$\text{grad } f(P) = (\cos(1)\cos(2), -\sin(1)\sin(2), 2 \cdot 3 \cdot 2, 3^2 + e^2)$$
$$\approx (-0.225;\ -0.7651;\ 12;\ 16.389)$$

Bem: Diese Werte ergeben sich bei Berechung im Bogenmass. Fasst man die x- und y- Werte von P als $1°$ bzw. $2°$ auf, so erhält man als Ergebnis $\approx (0,9992;\ -0,0006;\ 12;\ 16,389)$.

Aufgabe 3

a.)

$$\int_{y=0}^{x} 2xy\ dy = \left[x\ y^2\right]_{y=0}^{y=x} = x^3 - x \cdot 0^2 = x^3.$$

b.)

$$\int_{x=1}^{2} \int_{y=0}^{x} 2xy\ dy\ dx = \int_{x=1}^{2} \left(\int_{y=0}^{x} 2xy\ dy\right)\ dx$$
$$= \int_{x=1}^{2} \left(x^3\right)\ dx$$
$$= \int_{x=1}^{2} x^3\ dx$$
$$= \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = 3,75.$$

Aufgabe 4

$$\int_{x=0}^{4}\int_{y=0}^{4-x}\int_{z=0}^{4-y-x} 60z^2 \; dz \; dy \; dx$$

$$= \int_{x=0}^{4}\int_{y=0}^{4-x}\Big[20 \; z^3\Big]_{z=0}^{4-y-x} \; dy \; dx$$

$$= \int_{x=0}^{4}\int_{y=0}^{4-x} 20 \cdot (4-y-x)^3 \; dy \; dx$$

$$= \int_{x=0}^{4}\Big[-5 \; (4-y-x)^4\Big]_{y=0}^{4-x} \; dx$$

$$= \int_{x=0}^{4}\big(-5 \; (4-4+x-x)^4 + 5 \; (4-x)^4\big) \; dx$$

$$= \int_{x=0}^{4} 5 \; (4-x)^4 \; dx$$

$$= \big[-(4-x)^5\big]_0^4$$

$$= 0 + 4^5 = 1024$$