Zusatzaufgaben - Musterlösung

TH Mittelhessen, Mathematik 2 für EI, Prof. Dr. B. Just

Zusatzaufgabe Polarkoordinaten

Die Fläche wird durch Integration in Polarkoordinaten berechnet. Dabei wird über die konstante Funktion $f(r,\varphi) = 1$ integriert:

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi_u=0}^{\varphi_o=2\pi} \int_{r_u=(1+\cos(\varphi))/2}^{r_o=(1+\cos(\varphi))} 1 \cdot r \; dr \; d\varphi &= \int_{\varphi_u=0}^{\varphi_o=2\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{(1+\cos(\varphi))/2}^{1+\cos(\varphi)} d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \Big(\frac{(1+\cos(\varphi))^2}{2} - \frac{(1+\cos(\varphi))^2}{8} \Big) d\varphi \\
&= \Big[\frac{3}{16} \cdot \sin(\varphi)\cos(\varphi) + 4\sin(\varphi) + 3\varphi \Big]_0^{2\pi} \\
&= \frac{9}{8}\pi \approx 3.534 \; .
\end{aligned}$$

Dabei wurde $\int (1+\cos\ \varphi)^2 \ d\varphi = 0,5 \cdot [\sin\varphi \cdot \cos\varphi + 4\sin\varphi + 3\varphi] + C$ per Taschenrechner bzw. per online-Integration gefunden.

Zusatzaufgabe Dreifachintegrale

$A = \{(x,y,z)\} \in \mathbb{R}^3 : x,y,z \geq 0 \wedge x+y+z \leq 1\}$
$x_u = 0,\ x_o = 1$
x fest $\Rightarrow y_u = 0,\ y_o = 1-x$
x,y fest $\Rightarrow z_u = 0,\ z_o = 1-x-y$.
Man erhält also:

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{(A)} f \ dA &= \int\limits_{x_u=0}^{x_o=1} \int\limits_{y_u=0}^{y_o=1-x} \int\limits_{z_u=0}^{z_o=1-y-x} x \, dz \, dy \, dx \\
&= \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{1-x} [xz]_{z=0}^{1-y-x} \ dy \ dx \\
&= \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{1-x} (x - xy - x^2) \, dy \, dx \\
&= \int\limits_{x=0}^{1} \left[xy - \frac{xy^2}{2} - x^2 y \right]_{y=0}^{1-x} dz \\
&= \int\limits_{x=0}^{1} 0,5(x^3 - 2x^2 + x) \, dx \\
&= 0,5 \cdot \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \\
&= 0,5 \cdot \left[\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{24} = 0,041\overline{6}
\end{aligned}$$