Übungsblatt 4

Technische Hochschule Mittelhessen, Mathematik 2 für EI, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

Über welche Flächen bzw. Körper wird hier integriert? Bitte fertigen Sie jeweils eine Skizze an.

a.)

$$\int_{x=-2}^{3} \int_{y=1}^{4} f(x,y)\ dy\ dx$$

b.)

$$\int_{x=-\pi}^{\pi} \int_{y=-2}^{\sin x} f(x,y)\ dy\ dx$$

c.)

$$\int_{x=2}^{3} \int_{y=x}^{x^2/2} f(x,y)\ dy\ dx$$

d.) (War schonmal dran ...)

$$\int_{x=0}^{4} \int_{y=0}^{4-x} \int_{z=0}^{4-y-x} f(x,y,z)\ dz\ dy\ dx$$

e.) Erfinden Sie selbst ein Doppelintegral (oder Dreifachintegral) - und fertigen Sie dann die Skizze an, aus der hervorgeht, über welche Fläche (bzw. Körper) integriert wurde.

Aufgabe 2

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x \cdot \sin(y)$. Bitte berechnen Sie $\iint\limits_{(A)} f\ dA$ für die genannten Bereiche A.

a.) $A \subset \mathbb{R}^2$ ist das Dreieck mit den Ecken $(0,0)$, $(1,0)$ und $(1,1)$.

b.) $A \subset \mathbb{R}^2$ ist die Fläche vom Nullpunkt aus zwischen der x-Achse und der Normparabel (die jedem x sein x^2 zuordnet), wobei die Fläche bei $x = 1$ durch eine zur y-Achse parallele Linie begrenzt wird. A sieht also aus wie das Dreieck aus Teil a.), die obere Begrenzende ist aber die Normparabel.

... auf der Rückseite kommen noch drei Aufgaben ...

Aufgabe 3

Bitte zeichnen Sie die folgenden Kurven, und markieren Sie jeweils die Kurvenpunkte für ganzzahlige t.
(Bem: Kurven kann auch der Taschenrechner zeichnen, das eignet sich gut zur Kontrolle. Die Kurvenpunkte für ganzzahlige t stellt er jedoch nicht dar).

a.) $r : [0,2] \to \mathbb{R}^2,\ r(t) = (t\ ,\ 2t)$

b.) $r : [0,5] \to \mathbb{R}^2,\ r(t) = (t\ , t^{3/2})$
(Die sogenannte „Neilsche Parabel").

c.) $r : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ r(t) = (t - \sin(t)\ ,\ 1 - \cos(t))$
(Die sogenannte „Abrollkurve", Winkel im Bogenmaß.)

d.) $r : [0,4] \to \mathbb{R}^2,\ r(t) = (t/2\ ,\ t)$

e.) Was ist der Unterschied zwischen a. und d.?

Aufgabe 4

Bitte bestimmen Sie die Bogenlängen der folgenden Kurven. Dabei können Stammfunktionen im Taschenrechner oder online nachgesehen werden ;-).

a.) $r : [0,2] \to \mathbb{R}^2,\ r(t) = (t\ ,\ 2t)$

b.) $r : [0,a] \to \mathbb{R}^2,\ r(t) = (t\ , t^{3/2})$
(Die sogenannte "Neilsche Parabel").

c.) $r : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ r(t) = (t - \sin(t)\ ,\ 1 - \cos(t))$
(Die sogenannte Abrollkurve, Bild wurde bereits gezeichnet :-))
Hinweis: Man benutze die trigonometrische Formel $1 - \cos(t) = 2 \cdot \sin^2(t/2)$.

Aufgabe 5

Der gradlinige Weg vom Punkt P zum Punkt Q im $\mathbb{R}^n$ lässt sich als Kurve C bekanntlich wie folgt durch die Funktion $r : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ parametrisieren:

$$I = [0,1], \quad r(t) = (1-t) \cdot P + t \cdot Q.$$

So lässt sich z. B. der gradlinige Weg vom Punkt $(2,3,4)$ zum Punkt $(5,0,-2)$ im $\mathbb{R}^3$ parametrisieren durch $r(t) = (1-t) \cdot (2,3,4) + t \cdot (5,0,-2)$, also durch $r(t) = (2+3t\ ,\ 3-3t\ ,\ 4-6t)$. Man überzeuge sich von $r(0) = P$ und $r(1) = Q$.

a.) Bitte parametrisieren Sie den gradlinigen Weg zwischen den Punkten $(1,2)$ und $(10,2)$ im $\mathbb{R}^2$.

b.) Bitte parametrisieren Sie den gradlinigen Weg zwischen den Punkten (a,b) und (c,d) im $\mathbb{R}^2$.

c.) Bitte parametrisieren Sie den gradlinigen Weg zwischen den Punkten $(0,0,0)$ und $(1,2,4)$ im $\mathbb{R}^3$.

d.) (Umgekehrter Durchlauf von c.)) Bitte parametrisieren Sie den gradlinigen Weg zwischen den Punkten $(1,2,4)$ und $(0,0,0)$ im $\mathbb{R}^3$.

Viel Spass und Erfolg!