

# Übungsblatt 8 + 9 - Musterlösung

Technische Hochschule Mittelhessen, Mathematik 2 für EI, Prof. Dr. B. Just

## Aufgabe 1

a.)

i.) Zugehörige homogene DGL ist  $y' + 5y = 0$ .

Charakteristisches Polynom:  $\lambda + 5$

Einfache reelle Nullstelle bei  $\lambda = -5$

Basislösung:  $y = e^{-5x}$ .

Allgemeine Lösung der homogenen DGL :  $y = C \cdot e^{-5x}, C \in \mathbb{R}$

ii.) Störfunktion hat Gestalt  $g(x) = 2 \cdot e^{-5x}$ ,

also  $g(x) = p(x) \cdot e^{-5x} \cdot \cos(0 \cdot x)$  mit  $p(x) = 2$

Resonanzprüfung: Ist  $-5 \pm 0 \cdot j = \alpha \pm \beta j$  Nullstelle des charakteristischen Polynoms?

Ja, einfache Nullstelle. Es liegt Resonanz vor.

Ansatz für partikuläre Lösung:

$y_p = x \cdot e^{-5x} \cdot (Q_1(x) \sin(0x) + Q_2(x) \cos(0x))$  mit Polynomen  $Q_1(x), Q_2(x)$  vom Grad 0, also Konstanten.

Somit (wegen  $\sin(0 \cdot x) = 0$  und  $\cos(0 \cdot x) = 1$ ):

$y_p = x \cdot e^{-5x} \cdot A$  ist Ansatz für partikuläre Lösung.

$$y_p = x \cdot e^{-5x} \cdot A \Rightarrow y_p' = A \cdot e^{-5x} - 5Ax \cdot e^{-5x}$$

Wegen  $y_p' + 5y_p = 2 \cdot e^{-5x}$  muss für  $A$  gelten:

$$A \cdot e^{-5x} - 5Ax e^{-5x} + 5x \cdot e^{-5x} \cdot A = 2 \cdot e^{-5x}$$

$$\Rightarrow A \cdot (1 - 5x + 5x) = 2 \Rightarrow A = 2$$

Die partikuläre Lösung ist  $y_p = 2 \cdot x \cdot e^{-5x}$

iii.) Die allgemeine Lösung der DGL ist  $y(x) = 2 \cdot x \cdot e^{-5x} + C \cdot e^{-5x}, C \in \mathbb{R}$   
(partikuläre Lösung der inhomogenen DGL + allgemeine Lösung der homogenen DGL)

iv.) Für das Anfangswertproblem ist  $y(2) = 2 \cdot 2 \cdot e^{-5 \cdot 2} + c \cdot e^{-5 \cdot 2} = 6 \cdot e^{-10}$ ,

$$\text{also } 4 \cdot e^{-10} + C \cdot e^{-10} = 6 \cdot e^{-10} \Rightarrow C = 2$$

Lösung des Anfangswertproblems ist  $y = 2 \cdot x \cdot e^{-5x} + 2 \cdot e^{-5x}$

b.) Das Vorgehen ist wie in Teil a.)

i.) Bestimmung der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen DGL (vgl. auch Aufgabe 1d) :

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

Char. Polynom  $\lambda^2 - 2\lambda + 5$  hat komplexes Nullstellenpaar  $\lambda_{1|2} = 1 \pm 2j$

$\Rightarrow$  Basislösungen  $e^x \cdot \sin(2x)$  und  $e^x \cdot \cos(2x)$

Allgemeine Lösung:  $C_1 e^x \sin(2x) + C_2 e^x \cos(2x)$

ii.) Prüfung, ob die Störfunktion zu einer Resonanz führt und Bestimmung einer partikulären Lösung der DGL:

$$g(x) = \cos(2x) = p(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot (\cos(\beta x)) \text{ mit } p(x) = 1, \alpha + \beta j = 0 + 2j$$

$0 + 2j$  ist keine Nullstelle des char. Polynoms der DGL, also keine Resonanz.

Ansatz für die partikuläre Lösung

$$y_p = e^{0x}(Q_1(x) \sin(2x) + Q_2(x) \cos(2x))$$

mit Polynomen  $Q_1(x), Q_2(x)$  von Grad 0, also  $y_p = A \cdot \sin(2x) + B \cdot \cos(2x)$ .

Somit

$$y'_p = 2A \cdot \cos(2x) - 2B \sin(2x)$$

$$y''_p = -4A \sin(2x) - 4B \cos(2x)$$

Wegen  $y''_p - 2y'_p + 5y_p = \cos(2x)$  muß für A und B gelten:

$$y''_p - 2y'_p + 5y_p =$$

$$-4A \cdot \sin(2x) - 4B \cdot \cos(2x) - 2 \cdot (2A \cos(2x) - 2B \sin(2x)) + 5 \cdot (A \cdot \sin(2x) + B \cdot \cos(2x)) = \cos(2x),$$

$$\text{also } \sin(2x) \cdot (-4A + 4B + 5A) + \cos(2x) \cdot (-4B - 4A + 5B) = \cos(2x),$$

$$\text{also } -4A + 4B + 5A = A + 4B = 0 \Rightarrow A = -4B, \text{ und}$$

$$-4B - 4A + 5B = B - 4A = 1 \Rightarrow B + 16B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{17} \text{ und somit } A = -\frac{4}{17}$$

Die partikuläre Lösung ist

$$y_p = A \cdot \sin(2x) + B \cdot \cos(2x) = -\frac{4}{17} \sin(2x) + \frac{1}{17} \cdot \cos(2x)$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist

$$-\frac{4}{17} \sin(2x) + \frac{1}{17} \cos(2x) + C_1 e^x \sin(2x) + C_2 e^x \cos(2x).$$

iv.) Bestimmung der speziellen Lösung für die Anfangswertaufgabe anhand der vorgegebenen Werte:

$C_1$  und  $C_2$  sind so zu bestimmen, dass gilt:

Wegen  $y(0) = 1$ :

$$-\frac{4}{17} \sin(2 \cdot 0) + \frac{1}{17} \cdot \cos(2 \cdot 0) + C_1 \cdot e^0 \cdot \sin(2 \cdot 0) + C_2 \cdot e^0 \cos(2 \cdot 0) = 1,$$

$$\text{also } \frac{1}{17} + C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = \frac{16}{17}.$$

Wegen  $y(\frac{\pi}{4}) = 0$ :

$$-\frac{4}{17} \sin(\frac{2\pi}{4}) + \frac{1}{17} \cos(\frac{2\pi}{4}) + C_1 \cdot e^{\frac{\pi}{4}} \cdot \sin(\frac{2\pi}{4}) + \frac{16}{17} \cdot e^{\frac{\pi}{4}} \cdot \cos(\frac{2\pi}{4}) = 0,$$

$$\text{also } -\frac{4}{17} + C_1 \cdot e^{\frac{\pi}{4}} = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{4}{17 \cdot e^{\pi/4}}$$

Die Lösung des Anfangswertsproblems lautet

$$y = \frac{1}{17} \cos(2x) - \frac{4}{17} \sin(2x) + \frac{4}{17 \cdot e^{\pi/4}} \cdot e^x \sin(2x) + \frac{16}{17} e^x \cos(2x)$$

## Aufgabe 2:

a.) Charakteristisches Polynom:  $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$

b.) Nullstellen:  $\lambda_{1/2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}$  pq-Formel

c.)  $p(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) = \cos(x) \Rightarrow p(x) = 1$ ,  $\text{grad } p(x) = 0$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$   
 $\alpha + j\beta = 0 + j \cdot 1 = j$

d.) Es kann keine Resonanz im aperiodischen Grenzfall entstehen, denn die Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist  $-\frac{a_1}{2}$ , also nicht  $\alpha + j\beta = j$  (denn  $-\frac{a_1}{2}$  ist reell)

e.) Es kann keine Resonanz im Kriechfall entstehen, denn die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind  $-\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}$   
Da beide reell sind, sind sie nicht  $\alpha + j\beta = j$

f.) Es kann Resonanz im Schwingfall entstehen, denn im Fall  $a_1 = 0$  und  $a_0 = 1$  ist die Zahl  $\alpha + j\beta = j$  aus dem Störansatz eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms.

g.) Ansatz für die partikuläre Lösung

$$y_p = x(A \cos(x) + B \sin(x))$$

denn:

allgemeiner Ansatz:

$$y_p(x) = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot (Q_1(x) \cdot \sin(\beta x) + Q_2(x) \cdot \cos(\beta x))$$

mit  $r =$  Vielfachheit der Nullstelle,  $Q_1, Q_2$  Polynome vom Grad  $\text{grad } p(x)$

$$\text{Hier: } \alpha = 0, \beta = 1, r = 1, \text{grad } p(x) = 0$$

$$\Rightarrow Q_1, Q_2 \text{ konstant und } y_p = x(A \cos(x) + B \sin(x))$$

Anmerkung: Als partikuläre Lösung ergibt sich dann  $y_p = \frac{x}{2} \cdot \sin x$ .

h.)  $y_p(x)$  ist für  $x \rightarrow \infty$  nicht beschränkt.

Z.B. bei allen Vielfachen von  $\pi$  ist  $|y_p(x)| = |A \cdot x|$

Für  $x \rightarrow \infty$  wird jede Grenze überschritten