Übungsblatt03 - Spezielle unentscheidbare Sprachen

TH Mittelhessen, FB MNI, Berechenbarkeit und Komplexität, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

Bitte beweisen Sie mit einem Diagonalisierungsverfahren, dass das Halteproblem unentscheidbar ist:

$$\mathrm{HALT}_{\mathrm{TM}} = \{(M, \omega) : \text{Turingmaschine } M \text{ hält bei Input } \omega\}.$$

Die Methode der Diagonalisierungsverfahren ist nach dem Cantor'schen Diagonalisierungsverfahren (1877) benannt. Diagonalisierungsverfahren beweisen Nichtexistenzen durch Widerspruch. Sie nehmen die Existenz an, und führen sie zu einer paradoxen Situation vom folgenden Typ herbei:
„Wenn das Objekt eine bestimmte Eigenschaft hat, hat es sie nicht, und umgekehrt."

Aufgabe 2

Bitte beweisen Sie mit durch Reduktion des Halteproblems (siehe Aufgabe 1) auf die Sprache A_{TM}, dass diese unentscheidbar ist:

$$\mathrm{A}_{\mathrm{TM}} = \{(M, \omega) : \text{Turingmaschine } M \text{ akzeptiert Input } \omega\}.$$

Die Methode der Reduktion führt allgemein ein zu untersuchendes Berechnungsproblem auf ein bereits untersuchtes zurück. Es wird gezeigt, dass mit einem Algorithmus für das zu untersuchende Problem auch ein Algorithmus für das bereits untersuchte Problem existiert. Das kann dann zu einem Widerspruch zu bekannten Eigenschaften des bereits untersuchten Problems führen.
In dieser Aufgabe ist speziell zu zeigen: Wenn A_{TM} entscheidbar wäre, wäre auch das Halteproblem entscheidbar.

Aufgabe 3

a.) Bitte zeigen Sie, dass die folgende Sprache unentscheidbar ist:

$$\mathrm{E}_{\mathrm{TM}} = \{M : M \text{ ist Turingmaschine mit } L(M) = \emptyset\}.$$

b.) Bitte zeigen Sie, dass die folgende Sprache unentscheidbar ist:

$$\begin{aligned} EQ_{\mathrm{TM}} = \{(M_1, M_2) :\ & M_1 \text{ und } M_2 \text{ sind Turingmaschinen,} \\ & \text{die dieselben Sprachen akzeptieren}\}. \end{aligned}$$

Viel Spass und Erfolg!