

Übungsblatt04 - Semientscheidbarkeit

TH Mittelhessen, FB MNI, Berechenbarkeit und Komplexität, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

Bitte beweisen Sie die folgenden Aussagen, ohne währenddessen noch einmal in Ihre Mitschrift zu schauen :):

- a.) $\text{HALT}_{\text{TM}} = \{(M, \omega) : \text{Turingmaschine } M \text{ hält bei Input } \omega\}$ ist aufzählbar (d.h., semi-entscheidbar).
- b.) $A_{\text{TM}} = \{(M, \omega) : \text{Turingmaschine } M \text{ akzeptiert Input } \omega\}$ ist aufzählbar (d.h., semi-entscheidbar).
- c.) $\text{NotEmpty}_{\text{TM}} = \{M : \text{Turingmaschine } M \text{ akzeptiert mindestens einen Input}\}$ ist aufzählbar (d.h., semi-entscheidbar).
- d.) $\overline{\text{HALT}}_{\text{TM}} = \{(M, \omega) : \text{Turingmaschine } M \text{ hält nicht bei Input } \omega\}$ ist nicht aufzählbar.
- e.) $\overline{A}_{\text{TM}} = \{(M, \omega) : \text{Turingmaschine } M \text{ akzeptiert nicht den Input } \omega\}$ ist nicht aufzählbar.
- f.) $\text{Empty}_{\text{TM}} = \{M : \text{Turingmaschine } M \text{ akzeptiert keinen Input}\}$ ist nicht aufzählbar.

Aufgabe 2

Bitte beweisen Sie, dass die folgende Menge nicht aufzählbar und auch nicht co-aufzählbar ist:

$$\text{EQ}_{\text{TM}} = \{(M_1, M_2) : M_1, M_2 \text{ sind Turingmaschinen mit } L(M_1) = L(M_2)\}$$

Hinweis: Anspruchsvoll, aber spannend :). Beides wird mit Widerspruchsbeweis gemacht. Man zeigt mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 1: Wäre EQ_{TM} aufzählbar (also, semi-entscheidbar), so wäre auch Empty_{TM} aufzählbar, im Widerspruch zu Aufgabe 1. Und man zeigt: Wäre EQ_{TM} co-aufzählbar, so wäre \overline{A}_{TM} aufzählbar, ebenfalls im Widerspruch zu Aufgabe 1.

Aufgabe 3

Bitte entscheiden Sie, ob die folgenden Sprachen entscheidbar, aufzählbar, co-aufzählbar oder weder aufzählbar noch co-aufzählbar sind. Es geht dabei vor allem darum, ein Gefühl für die Sprachen zu bekommen, formale Beweise sind nicht erforderlich.

- a.) $\{p \in \mathbb{N} : p \text{ ist prim}\}$.
- b.) $\{G = (V, E) : G \text{ ist zusammenhängender Graph}\}$.
- c.) $\{G = (V, E) : G \text{ ist nicht zusammenhängender Graph}\}$
- d.) Die Menge aller Turingmaschinen, die das Wort „Katze“ akzeptieren.
- d.) Die Menge aller Turingmaschinen, die nur das Wort „Katze“ akzeptieren.
- e.) Die Menge aller Turingmaschinen, die gar nichts akzeptieren.
- f.) Die Menge aller Turingmaschinen, die jedes Wort akzeptieren.
- g.) Die Menge aller C++ Programme, die stets anhalten.
- h.) Die Menge aller C++ Programme, die syntaktisch korrekt sind.

Aufgabe 4

Bitte überlegen Sie sich selbst Sprachen, die entscheidbar, aufzählbar, co-aufzählbar oder weder aufzählbar noch co-aufzählbar sind. Wieder geht es dabei darum, ein Gefühl für die Sprachen zu bekommen, formale Beweise sind nicht erforderlich.

Viel Spass und Erfolg!