Übungsblatt07 - Polynomialzeit-Reduktionen - Musterlösung

TH Mittelhessen, FB MNI, Berechenbarkeit und Komplexität, Prof. Dr. B. Just

Vorbemerkung

Für dieses Übungsblatt werden 8 Berechnungsprobleme gebraucht, die teils schon auf Übungsblatt 6 vorkamen, teils in der Vorlesung vorkamen, und teils auf diesem Übungsblatt erstmals vorkommen. Hier sind sie:

• PARTITION $= \{(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{N}^n :\ \exists$ Teilmenge $\ S \subseteq \{1, ..., n\}\ $ mit $\Sigma_{i \in S}\ a_i = \Sigma_{i \notin S}\ a_i\}$.

Die (nicht notwendig verschiedenen) Gewichte $a_1, .., a_n$ können also so auf den beiden Seiten einer Balkenwaage verteilt werden, dass diese im Gleichgewicht ist.

• BIN-PACKING $= \{(a_1, ..., a_n, b, k) \in \mathbb{N}^{n+2} : \{1, ..., n\}$ kann in k paarweise disjunkte, möglicherweise leere, Teilmengen $\ S_1, ..., S_k\ $ zerlegt werden, mit $\Sigma_{i \in S_j}\ a_i \leq b$ für $\ j = 1, ..., k\}$.

Ein Problem mit vielen praktischen Anwendungen in der Verpackungsindustrie, aber auch bei Zuordnen von Tasks zu verschiedenen Prozessoren für die Parallelisierung von Berechnungen.

• 3-SAT $=\{$erfüllbare boolesche Formeln in CNF mit drei Literalen, evtl. wiederholt, in jeder Klausel$\}$.

CNF ist die Konjunktive Normalform, ein UND über lauter ODERs. Die ODERs heißen „Klauseln“. Die negierten oder nicht negierten Variablen in den Klauseln heißen „Literale“.

• MINE-CONSISTENCY$=\{G : G$ ist partiell gelabelter Graph, für den eine Minen-Zuordnung existiert$\}$

(siehe Sipser, S. 325). Ein partiell gelabelter Graph ist ein Graph, bei dem einige (nicht notwendig alle) Knoten ein Label tragen. Das Label kann eine natürliche Zahl (incl. 0) oder die Kennzeichnung „Mine“ sein. Eine „Minen-Zuordnung“ ist eine Erweiterung des Labels, sodass jeder Knoten, der nicht mit einer Mine gelabelt ist, mit der Zahl seiner Nachbarminenknoten gelabelt ist.
Natürlich ist diese Sprache vom Spiel „Minesweeper“ inspiriert :).

• $\text{SAT}_{\text{CNF}} = \{$erfüllbare boolesche Formeln in CNF $\}$.

CNF ist wieder die Konjunktive Normalform, ein UND über lauter ODERs. Die ODERs heißen „Klauseln“. Die negierten oder nicht negierten Variablen in den Klauseln heißen „Literale“.

• SOLITAIRE$=\{$Solitaire-zulässige $\ s \times n$ - Matrizen $M \in \{b, r, e\}^{sn}\}$

(siehe Sipser, S. 325). Dabei heißt eine Matrix mit Einträgen b (blau), r (rot) und e (empty) „Solitaire-zulässig“, wenn es möglich ist, eine Teilmenge der b- und r-Einträge durch e zu ersetzen, sodass dann folgendes gilt:
i.) Jede Spalte enthält nur noch rote und leere oder blaue und leere Einträge, und
ii.) Jede Zeile enthält mindestens einen roten oder blauen Eintrag.
Ok, etwas künstlich, aber zu Übungszwecken gut geeignet.

• VERTEX-COVER $= \{(G, k) : k \in \mathbb{N},\ G\ $ ungerichteter Graph, $\ $mit k-Vertex-Cover$\}$.

Definition: Ein Vertex-Cover ist eine Teilmenge der Knoten (vertex) des Graphen, mit nichtleerem Schnitt zu jeder Kante.

• SUBSET-SUM $= \{(S, t) : S = \{x_1, ..., x_n\} \subset \mathbb{N}\ $ und $\exists\ y_1, ..., y_s \in S\ $ mit $\ \Sigma y_i = t\}$.

... auf den nächsten Seiten kommen Aufgaben und Musterlösungen

Aufgabe 1

Bitte beweisen Sie

PARTITION $\leq_p$ BIN-PACKING.

Lösung Aufgabe 1:

Gegeben sei in Input $(a_1, ..., a_n)$ für PARTITION. Es sei $a = \sum_{i=1}^{n} a_i$, und es sei $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^{n+2}$ definiert durch

$$f((a_1, ..., a_n)) = (a_1, ..., a_n, \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor, 2),$$

wobei $\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$ der ganzzahlige Anteil von $a/2$ ist.

f ist eine Polynomialzeit-berechenbare Funktion, denn es werden nur $n-1$ Additionen und eine Division durchgeführt.

Wir zeigen nun: $(a_1, ..., a_n) \in$ PARTITION $\iff f((a_1, ..., a_n)) \in$ BIN-PACKING. Damit ist dann gezeigt, dass PARTIITON auf BIN-PACKING in Polynomialzeit reduziert werden kann.

Beweisteil „$\Longrightarrow$:“

Ist $(a_1, ..., a_n) \in$ PARTITION, so gibt es eine Teilmenge $S \subseteq \{1, ..., n\}$ mit $\Sigma_{i \in S}\ a_i = \Sigma_{i \notin S}\ a_i$.

Es ist dann $\Sigma_{i \in S}\ a_i = \Sigma_{i \notin S}\ a_i = a/2$.

Somit ist $\Sigma_{i \in S}\ a_i \leq \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$ und $\Sigma_{i \notin S}\ a_i \leq \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$, also ist $(a_1, ..., a_n, \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor, 2) \in$ BIN-PACKING.

Beweisteil „$\Longleftarrow$:“

Es sei $(a_1, ..., a_n, \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor, 2) \in$ BIN-PACKING.

Dann gibt es zwei Teilmengen $S_1, S_2 \subseteq \{1, ..., n\}$ mit

i.) $\Sigma_{i \in S_1}\ a_i \leq \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$, und

ii.) $\Sigma_{i \in S_2}\ a_i \leq \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$, und

iii.) $S_1 \cup S_2 = \{1, ..., n\}$.

Da $\Sigma_{i \in S_1}\ a_i + \Sigma_{i \in S_2}\ a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i = a$, muss gelten $\Sigma_{i \in S_1}\ a_i = a/2$ und $\Sigma_{i \in S_2}\ a_i = a/2$.

Somit ist $(a_1, ..., a_n) \in$ PARTITION. Q.e.d.

Aufgabe 2

Bitte beweisen Sie

3-SAT $\leq_p$ MINE-CONSISTENCY.

Hinweis: (erst lesen, wenn Sie es selbst versucht haben :))

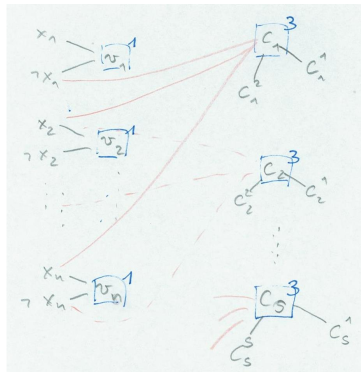
Für eine 3-SAT-Formel Φ in den booleschen Variablen $x_1, ..., x_n$ und mit den Klauseln $c_1, ..., c_s$ sei $f(\Phi)$ der gelabelte Graph $G(\Phi) = (V, E, L)$ mit Knotenmenge
V= $\{x_1, ..., x_n, \overline{x_1}, ..., \overline{x_n}, v_1, ..., v_n, c_1, ..., c_s, c_1^1, ..., c_s^1, c_1^2, ..., c_s^2\}$,
dem Labeling L so, dass $v_1, ..., v_n$ jeweils mit 1 gelabelt sind, und $c_1, ..., c_s$ jeweils mit 3 gelabelt sind,
und Kanten zwischen folgenden Knoten:
i.) Zwischen x_i und v_i sowie zwischen $\overline{x_i}$ und v_i für $i = 1, ..., n$;
ii.) zwischen c_j und c_j^1 sowie zwischen c_j und c_j^2 für $j = 1, ..., s$;
iii.) zwischen c_j und allen Knoten x_i bzw. $\overline{x_i}$, wenn das Literal in der Klausel vorkommt (bei wiederholtem Vorkommen nur eine Kante im Graphen).

Jetzt können Sie zeigen: $\Phi \in$ 3-SAT $\iff G(\phi) \in$ MINE-CONSISTENCY

Lösung Aufgabe 2:

f ist eine Polynomialzeit-berechenbare Funktion. Denn für eine Formel mit n Variablen und s Klauseln hat der zugeordnete Graph $3 \cdot (n+s)$ viele Knoten und (somit) höchstens $9 \cdot (n+s)^2$ viele Kanten. Seine Größe ist also polynomial in der Länge der Formel.

Die folgende Skizze veranschaulicht den Graphen $G(\Phi)$ für eine Formel mit n Variablen und s Klauseln.



Wir zeigen nun: $\Phi \in$ 3-SAT $\Longleftrightarrow G(\phi) \in$ MINE-CONSISTENCY

Beweisteil „$\Longrightarrow$:“

Sei Φ eine erfüllbare Formel in CNF mit drei Literalen pro Klausel, mit n Variablen $x_1, ..., x_n$ und s Klauseln $c_1, ..., c_s$. .

Dann gibt es eine Belegung der Variablen $x_1, ...x_n$ mit den Wahrheitswerten Null und Eins, sodass in jeder Klausel mindestens ein Literal den Wahrheitswert Eins annimmt.

Im Graphen $G(\Phi)$ werden nun alle Literale, die in der Belegung den Wahrheitswert Eins annehmen, mit „Mine“ gelabelt.

Jeder Knoten v_i hat nun genau einen Nachbar mit dem Label „Mine“.

Jeder Knoten c_j hat mindestens einen Nachbarn mit dem Label „Mine“, da jede Klausel ein Literal enthält, das unter der Belegung den Wahrheitswert Eins annimmt.
Jeder Knoten c_j hat höchstens drei Nachbarn mit dem Label „Mine“, da jede Klausel höchstens drei unterschiedliche Literale enthält.

Damit ist es möglich, die Knoten $c_1^1, ..., c_s^1, c_1^2, ..., c_s^2$ so mit „Mine“ zu labeln, dass jeder Knoten c_j genau drei mit „Mine“ gelabelte Nachbarn hat.

Da diese keine Kanten zu den v_i haben, ist $G(\Phi) \in$ MINE-CONSISTENCY.

Beweisteil „$\Longleftarrow$:“

Es sei $G(\Phi) \in$ MINE-CONSISTENCY.

Gegeben sei eine konsistente Minen-Zuordnung zu den Knoten von $G(\Phi)$. Diese enthält für jedes vorkommende Variable x_i entweder eine Mine auf x_i oder eine Mine auf $\overline{x_i}$, da jedes v_i genau einen mit „Mine“ gelabelten Nachbarn hat.

Die Minen-Zuordnung enthält auch für jede Klausel c_j eine Mine auf einem in ihr vorkommenden Literal. Denn c_j hat drei Nachbarn, die mit „Mine“ gelabelt sind, aber höchstens zwei davon sind keine Literale.

Die Belegung, die x_i auf Eins setzt, wenn die Mine auf x_i ist, und auf Null setzt, wenn die Mine auf $\overline{x_i}$ ist, erfüllt die Formel Φ. Denn jede Klausel c_j enthält mindestens ein durch die Belegung erfülltes Literal.

Also ist $\Phi \in$ 3-SAT. Q.e.d.

Aufgabe 3

Bitte beweisen Sie

$\mathrm{SAT}_{\mathrm{CNF}} \leq_p$ SOLITAIRE.

Hinweis: (am besten gleich lesen)

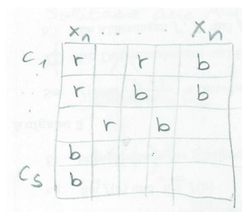
Für eine $\mathrm{SAT}_{\mathrm{CNF}}$-Formel Φ in den booleschen Variablen $x_1, ..., x_n$ und mit den Klauseln $c_1, ..., c_s$ sei $M(\Phi)$ die $s \times n$-Matrix (m_{ji}) mit

$$m_{ji} = \begin{cases} b & \text{falls in Klausel } c_j \text{ Literal } x_i \text{ vorkommt} \\ r & \text{falls in Klausel } c_j \text{ Literal } \overline{x_i} \text{ vorkommt} \\ e & \text{sonst} \end{cases}$$

Lösung Aufgabe 3:

M ist eine Polynomialzeit-berechenbare Funktion. Denn für eine Formel mit n Variablen und s Klauseln hat die zugeordnete Matrix $n \cdot s$ Felder, die mit einem Buchstaben beschriftet sind. Ihre Größe ist also polynomial in der Länge der Formel.

Die folgende Skizze veranschaulicht die Matrix $M(\Phi)$ für eine Formel mit n Variablen und s Klauseln.



Wir zeigen nun: $\Phi \in \mathrm{SAT}_{\mathrm{CNF}} \Longleftrightarrow M(\Phi) \in$ SOLITAIRE.

Beweisteil „$\Longrightarrow$:"

Sei Φ eine erfüllbare Formel in $\mathrm{SAT}_{\mathrm{CNF}}$ mit n Variablen $x_1, ..., x_n$ und s Klauseln $c_1, ..., c_s$.

Dann gibt es eine Belegung der Variablen $x_1, ...x_n$ mit den Wahrheitswerten Null und Eins, sodass in jeder Klausel mindestens ein Literal den Wahrheitswert Eins annimmt.

Ist in dieser Belegung der Wahrheitswert eines x_i Eins, werden in der Spalte, die mit x_i überschreiben ist, alle r-Einträge durch e-Einträge ersetzt. Die b-Einträge bleiben stehen.
Ist in der Belegung der Wahrheitswert eines x_i Null, werden in der mit x_i überschriebenen Spalte alle b-Einträge durch e-Einträge ersetzt. Die r-Einträge bleiben stehen.

Jetzt enthält jede Spalte nur noch rote und leere oder blaue und leere Einträge.

Außerdem enthält jede Zeile mindestens einen blauen oder roten Eintrag, da jede Klausel (mindestens) ein durch die Belegung erfülltes Literal enthielt.

Somit ist $M(\Phi) \in$ SOLITAIRE.

Beweisteil „$\Longleftarrow$:"

Es sei $M(\Phi) \in$ SOLITAIRE, und es sei $M'(\Phi)$ die Matrix, die aus $M(\Phi)$ entsteht, wenn man b-Einträge und r-Einträge so durch e-Einträge ersetzt, dass gilt

i.) Jede Spalte enthält nur noch rote und leere oder blaue und leere Einträge, und

ii.) Jede Zeile enthält mindestens einen roten oder blauen Eintrag.

Jedes x_i werde nun mit dem Wahrheitswert Eins belegt, wenn die Spalte von $M'(\Phi)$, die mit x_i überschrieben ist, nur b-Einträge und e-Einträge enthält. Ansonsten werde x_i mit dem Wahrheitwert Null belegt (die Spalte enthält dann nur r-Einträge und e-Einträge).

Diese Belegung erfüllt die Formel Φ, denn in jeder Klausel kommt wegen ii. mindestens ein Literal vor, das durch die Belegung erfüllt wird. Also ist $\Phi \in \mathrm{SAT}_{\mathrm{CNF}}$. Q.e.d.

Aufgabe 4

Bitte beweisen Sie

3-SAT $\leq_p$ VERTEX-COVER

Hinweis (auch gleich lesen ;)):
Dies wird in Sipser, S. 312 gezeigt. Schauen Sie dort nach, wie die Abbildung einer booleschen Formel in einen Graphen definiert ist.
Dann versuchen Sie zunächst selbst zu zeigen:
$\Phi \in$ 3-SAT $\iff (G(\phi), k_\Phi) \in$ VERTEX-COVER.
Die Richtung „$\Rightarrow$“ ist gut machbar, wenn Sie die Konstruktion richtig verstanden haben.
Die Richtung „$\Leftarrow$“ ist trickreicher, eventuell nochmal im Sipser spicken ;).

Lösung Aufgabe 4:

Hier gibt es keine separate Musterlösung, bitte lesen Sie im Sipser nach :).

Aufgabe 5

Bitte beweisen Sie

3-SAT $\leq_p$ SUBSET-SUM.

Hinweis (ohne den es gar nicht geht):
Dies wird in Sipser, S. 320, ab „Proof“ gezeigt. Schauen Sie dort nach, wie die Abbildung einer booleschen Formel in eine SUBSET-SUM-Problem definiert ist.
Dann versuchen Sie zunächst selbst zu zeigen:
$\Phi \in$ 3-SAT $\iff (S, t) \in$ SUBSET-SUM.
Beide Richtungen sind machbar - jedenfalls, wenn Sie ein Zeitfenster finden, in denen Sie fit sind und Sie sich wirklich auf diese beiden Berechnungsprobleme konstentrieren können ;).

Lösung Aufgabe 4:

Hier gibt es keine separate Musterlösung, bitte lesen Sie ebenfalls im Sipser nach :).