Übungsblatt07 - Polynomialzeit-Reduktionen

TH Mittelhessen, FB MNI, Berechenbarkeit und Komplexität, Prof. Dr. B. Just

Vorbemerkung

Für dieses Übungsblatt werden 8 Berechnungsprobleme gebraucht, die teils schon auf Übungsblatt 6 vorkamen, teils in der Vorlesung vorkamen, und teils auf diesem Übungsblatt erstmals vorkommen. Hier sind sie:

• PARTITION $= \{(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{N}^n : \ \exists$ Teilmenge $S \subseteq \{1, ..., n\}$ mit $\Sigma_{i \in S}\ a_i = \Sigma_{i \notin S}\ a_i\}$.

Die (nicht notwendig verschiedenen) Gewichte $a_1, .., a_n$ können also so auf den beiden Seiten einer Balkenwaage verteilt werden, dass diese im Gleichgewicht ist.

• BIN-PACKING $= \{(a_1, ..., a_n, b, k) \in \mathbb{N}^{n+2} : \{1, ..., n\}$ kann in k paarweise disjunkte, möglicherweise leere, Teilmengen $S_1, ..., S_k$ zerlegt werden, mit $\Sigma_{i \in S_j}\ a_i \leq b$ für $j = 1, ..., k\}$.

Ein Problem mit vielen praktischen Anwendungen in der Verpackungsindustrie, aber auch bei Zuordnen von Tasks zu verschiedenen Prozessoren für die Parallelisierung von Berechnungen.

• 3-SAT $=\{$erfüllbare boolesche Formeln in CNF mit drei Literalen, evtl. wiederholt, in jeder Klausel$\}$.

CNF ist die Konjunktive Normalform, ein UND über lauter ODERs. Die ODERs heißen „Klauseln“. Die negierten oder nicht negierten Variablen in den Klauseln heißen „Literale“.

• MINE-CONSISTENCY$=\{G : G$ ist partiell gelabelter Graph, für den eine Minen-Zuordnung existiert$\}$

(siehe Sipser, S. 325). Ein partiell gelabelter Graph ist ein Graph, bei dem einige (nicht notwendig alle) Knoten ein Label tragen. Das Label kann eine natürliche Zahl (incl. 0) oder die Kennzeichnung „Mine“ sein. Eine „Minen-Zuordnung“ ist eine Erweiterung des Labels, sodass jeder Knoten, der nicht mit einer Mine gelabelt ist, mit der Zahl seiner Nachbarminenknoten gelabelt ist.
Natürlich ist diese Sprache vom Spiel „Minesweeper“ inspiriert :).

• $\text{SAT}_{\text{CNF}} = \{$erfüllbare boolesche Formeln in CNF $\}$.

CNF ist wieder die Konjunktive Normalform, ein UND über lauter ODERs. Die ODERs heißen „Klauseln“. Die negierten oder nicht negierten Variablen in den Klauseln heißen „Literale“.

• SOLITAIRE$=\{$Solitaire-zulässige $s \times n$ - Matrizen $M \in \{b, r, e\}^{sn}\}$

(siehe Sipser, S. 325). Dabei heißt eine Matrix mit Einträgen b (blau), r (rot) und e (empty) „Solitaire-zulässig“, wenn es möglich ist, eine Teilmenge der b- und r-Einträge durch e zu ersetzen, sodass dann folgendes gilt:
i.) Jede Spalte enthält nur noch rote und leere oder blaue und leere Einträge, und
ii.) Jede Zeile enthält mindestens einen roten oder blauen Eintrag.
Ok, etwas künstlich, aber zu Übungszwecken gut geeignet.

• VERTEX-COVER $= \{(G, k) : k \in \mathbb{N},\ G$ ungerichteter Graph, mit k-Vertex-Cover$\}$.

Definition: Ein Vertex-Cover ist eine Teilmenge der Knoten (vertex) des Graphen, mit nichtleerem Schnitt zu jeder Kante.

• SUBSET-SUM $= \{(S, t) : S = \{x_1, ..., x_n\} \subset \mathbb{N}$ und $\exists\ y_1, ..., y_s \in S$ mit $\Sigma y_i = t\}$.

... auf der Rückseite kommen die Aufgaben

Aufgabe 1

Bitte beweisen Sie

PARTITION $\leq_p$ BIN-PACKING.

Aufgabe 2

Bitte beweisen Sie

3-SAT $\leq_p$ MINE-CONSISTENCY.

Hinweis: (erst lesen, wenn Sie es selbst versucht haben :))

Für eine 3-SAT-Formel Φ in den booleschen Variablen $x_1, ..., x_n$ und mit den Klauseln $c_1, ..., c_s$ sei $f(\Phi)$ der gelabelte Graph $G(\Phi) = (V, E, L)$ mit Knotenmenge
V= $\{x_1, ..., x_n, \overline{x_1}, ..., \overline{x_n}, v_1, ..., v_n, c_1, ..., c_s, c_1^1, ..., c_s^1, c_1^2, ..., c_s^2\}$,
dem Labeling L so, dass $v_1, ..., v_n$ jeweils mit 1 gelabelt sind, und $c_1, ..., c_s$ jeweils mit 3 gelabelt sind,
und Kanten zwischen folgenden Knoten:
i.) Zwischen x_i und v_i sowie zwischen $\overline{x_i}$ und v_i für $i = 1, ..., n$;
ii.) zwischen c_j und c_j^1 sowie zwischen c_j und c_j^2 für $j = 1, ..., s$;
iii.) zwischen c_j und allen Knoten x_i bzw. $\overline{x_i}$, wenn das Literal in der Klausel vorkommt (bei wiederholtem Vorkommen nur eine Kante im Graphen).

Jetzt können Sie zeigen: $\Phi \in$ 3-SAT $\Longleftrightarrow G(\phi) \in$ MINE-CONSISTENCY

Aufgabe 3

Bitte beweisen Sie

$\text{SAT}_{\text{CNF}} \leq_p$ SOLITAIRE.

Hinweis: (am besten gleich lesen)

Für eine SAT_{CNF}-Formel Φ in den booleschen Variablen $x_1, ..., x_n$ und mit den Klauseln $c_1, ..., c_s$ sei $M(\Phi)$ die $s \times n$-Matrix (m_{ji}) mit

$$m_{ji} = \begin{cases} b & \text{falls in Klausel } c_j \text{ Literal } x_i \text{ vorkommt} \\ r & \text{falls in Klausel } c_j \text{ Literal } \overline{x_i} \text{ vorkommt} \\ e & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 4

Bitte beweisen Sie

3-SAT $\leq_p$ VERTEX-COVER

Hinweis (auch gleich lesen ;)):
Dies wird in Sipser, S. 312 gezeigt. Schauen Sie dort nach, wie die Abbildung einer booleschen Formel in einen Graphen definiert ist.
Dann versuchen Sie zunächst selbst zu zeigen:
$\Phi \in$ 3-SAT $\Longleftrightarrow (G(\phi), k_\Phi) \in$ VERTEX-COVER.
Die Richtung „$\Rightarrow$“ ist gut machbar, wenn Sie die Konstruktion richtig verstanden haben.
Die Richtung „$\Leftarrow$“ ist trickreicher, eventuell nochmal im Sipser spicken ;).

Aufgabe 5

Bitte beweisen Sie

3-SAT $\leq_p$ SUBSET-SUM.

Hinweis (ohne den es gar nicht geht):
Dies wird in Sipser, S. 320, ab „Proof“ gezeigt. Schauen Sie dort nach, wie die Abbildung einer booleschen Formel in eine SUBSET-SUM-Problem definiert ist.
Dann versuchen Sie zunächst selbst zu zeigen:
$\Phi \in$ 3-SAT $\Longleftrightarrow (S, t) \in$ SUBSET-SUM.
Beide Richtungen sind machbar - jedenfalls, wenn Sie ein Zeitfenster finden, in denen Sie fit sind und Sie sich wirklich auf diese beiden Berechnungsprobleme konstentrieren können ;).

Viel Spass und Erfolg!