# Übungsblatt 1 - Musterlösung

Technische Hochschule Mittelhessen, Fachbereich MNI, Prof. Dr. B. Just
**Kategorientheorie für Informatiker**

## Vorbemerkung: Vorgehen um nachzuweisen, dass etwas eine Kategorie ist

Die folgenden Schritte definieren eine Kategorie und weisen nach, dass es eine Kategorie ist:

i.) Definition der **Objekte (objects)**.

ii.) Definition der **Pfeile (arrows)**.

Hier wird angegeben, für welche Objekte $A, B$ ein oder mehrere Pfeile $f : A \to B$ existieren, und welche inhaltliche Bedeutung und / oder Beschriftung die Pfeile haben.

iii.) Definition der **Verknüpfung $\circ$ von Pfeilen(composition $\circ$ of arrows)**.

Für zwei beliebige Pfeile $f_1 : A \to B$ und $f_2 : B \to C$ wird ein Pfeil $f_2 \circ f_1 : A \to C$ definiert.

iv.) Nachweis der Abgeschlossenheit der Pfeile gegenüber $\circ$.

Mit den Bezeichnungen aus iii.) muss gezeigt werden, dass $f_2 \circ f_1$ ein Pfeil aus ii.) ist.

v.) Nachweis des Assoziativgesetzes für $\circ$.

Für alle Pfeile $f : A \to B,\ g : B \to C,\ h : C \to D$ aus ii. muss gezeigt werden: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

vi. Nachweis der Existenz neutraler Elemente unter den Pfeilen.

Für jedes Objekt $s$ muss es einen Pfeil $id_s : s \to s$ gemäß den Regeln aus ii.) geben, sodass für jeden Pfeil $f : A \to B$ gilt: $id_B \circ f = f \circ id_A$.

## Aufgabe 1 - Musterlösung

a.) Nach Definition sind die Objekte die Mengen, und ein Pfeil von einer Menge $M_1$ zu einer Menge $M_2$ ist genau dann vorhanden, wenn gilt $M_1 \subseteq M_2$.

Die Komposition zweier Pfeile $M_1 \subseteq M_2$ und $M_2 \subseteq M_3$ ist der Pfeil $M_1 \subseteq M_3$. Dieser ist in der Kategorie vorhanden, denn mit $M_1 \subseteq M_2$ und $M_2 \subseteq M_3$ ist $M_1 \subseteq M_3$.

Das Assoziativgesetz gilt, denn mit den beliebigen Pfeilen $f : A \to B,\ g : B \to C,\ h : C \to D$ gilt $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, weil beides der Pfeil ist, der zur Teilmengenbeziehung $A \subseteq D$ gehört.

Für eine beliebige Menge $M$ ist $id_M$ der Pfeil, der für die Teilmengenbeziehung $M \subseteq M$ steht. Von rechts oder links verknüpft, ändert er eine andere Teilmengenbeziehung nicht.

b.) Nach Definition sind die Objekte die booleschen Funktionen auf zwei Variablen, also alle Funktionen
$f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$. Ein Pfeil von einer Funktion $f_1$ zu einer Funktion $f_2$ ist genau dann vorhanden, wenn für jeden Input $(x,y) \in \{0,1\}^2$ gilt: $f_1(x,y) \leq f_2(x,y)$.

Wir schreiben „$f_1 \leq f_2$“, wenn wenn für jeden Input $(x,y) \in \{0,1\}^2$ gilt: $f_1(x,y) \leq f_2(x,y)$.

Ist $p$ der Pfeil von $f_1$ zu $f_2$, und $q$ der Pfeil von $f_2$ zu $f_3$, so definieren wir $q \circ p$ als den Pfeil von $f_1$ zu $f_3$. Dieser ist in der Kategorie vorhanden, denn mit $f_1 \leq f_2$ und $f_2 \leq f_3$ gilt dann auch $f_1 \leq f_3$.

Das Assoziativgesetz gilt, weil für alle Pfeile $p : f_1 \to f_2$, $q : f_2 \to f_3$ und $r : f_3 \to f_4$ gilt, dass sowohl $(r \circ q) \circ p$ als auch $r \circ (q \circ p)$ der Pfeil von $f_1$zu $f_4$ ist.

Sei $f$ eine booleschen Funktion auf zwei Variablen, so ist $id_f : f \to f$ der Pfeil, der besagt, dass $f \leq f$ gilt. Ist $p : f_1 \to f_2$ ein beliebiger Pfeil, so ist offenbar $id_{f_2} \circ p = p \circ id_{f_1} = p$.

c.) **Poset** sind die partially ordered sets. Objekte sind definitionsgemäß die Halbordnungen. Die Pfeile $f$ von $(A, \leq_A)$ nach $(B, \leq_B)$ sind genau die Abbildungen $f : A \to B$, mit folgender Eigenschaft:
Für alle $a_1, a_2 \in A$ mit $a_1 \leq_A a_2$ gilt $f(a_1) \leq_B f(a_2)$.

Die Komposition zweier Pfeile
$f : (A, \leq_A) \to (B, \leq_B)$ und $g : (B, \leq_B) \to (C, \leq_C)$ sei definiert als die Hintereinanderausführung $g \circ f : A \to C$.
Zu zeigen ist, das dies eine isotone Abbildung von $A$ nach $C$ ist, dass also gilt:
Für alle $a_1, a_2 \in A$ mit $a_1 \leq_A a_2$ gilt $g \circ f(a_1) \leq_C g \circ f(a_2)$.

Das gilt, denn mit der Bezeichnung $b_1 = f(a_1),\ b_2 = f(a_2)$ ist $b_1 \leq_B b_2$, weil $f$ isoton ist. Damit erhält man, weil auch $g$ isoton ist:
$g \circ f(a_1) = g(b_1) \leq_C g(b_2) = g \circ f(a_2)$.

Die Identität auf jeder Halbordnung $(A, \leq_A)$ ist die identische Abbildung $id_A : A \to A$, die jedes Element auf sich selbst abbildet. Dann ist für jedes $f : (A, \leq_A) \to (B, \leq_B)$ offenbar $id_B \circ f = f \circ id_A = f$.

## Aufgabe 2 - Musterlösung

a.) $\mathbb{Z}$ mit der normalen Multiplikation, also $(\mathbb{Z}, \cdot)$, ist ein Monoid, denn die Multiplikation in $\mathbb{Z}$ ist bekanntlich assoziativ, mit neutralem Element $1 \in \mathbb{Z}$.

b.) Für einen festen Datentyp $T$ ist die Menge $L(T)$ der (endlich langen) Listen mit Elementen aus T mit der Verkettung ein Monoid. Denn die Verkettung von Listen ist assoziativ (wer will, zeigt dies mit vollständiger Induktion über die Länge der Listen mit cons), und die leere Liste ist das neutrale Element.

c.) Die Objekte von **Mon** sind definitionsgemäß die Monoide, Pfeile die Monoid-Homomorphismen zwischen ihnen. D.h., ein Pfeil $f$ von $(A, \circ_A)$ nach $(B, \circ_B)$ ist eine Abbildung $f : A \to B$, mit folgenden Eigenschaften:

i.) Für alle $a_1, a_2 \in A$ ist $f(a_1 \circ_A a_2) = f(a_1) \circ_B f(a_2)$

ii.) Sind $e_A$ bzw. $e_B$ die neutralen Elemente von $A$ bzw. $B$, so ist $f(e_A) = f(e_B)$.

Wir zeigen, dass **Mon** eine Kategorie ist.

Die Komposition zweier Pfeile
$f : (A, \circ_A) \to (B, \circ_B)$ und $g : (B, \circ_B) \to (C, \circ_C)$ sei definiert als die Hintereinanderausführung $g \circ f : A \to C$.
Zu zeigen ist, das dies ein Monoid-Homomorphismus von $A$ nach $C$ ist, dass also gilt:

i.) Für alle $a_1, a_2 \in A$ ist $(g \circ f)(a_1 \circ_A a_2) = (g \circ f)(a_1) \circ_C (g \circ f)(a_2)$.

ii.) Sind $e_A$ bzw. $e_B$ bzw. $e_C$ die neutralen Elemente von $A$ bzw. $B$ bzw. $C$, so ist $(g \circ f)(e_A) = e_C$.

i.) gilt, denn mit der Bezeichnung $b_1 = f(a_1),\ b_2 = f(a_2)$ ist

$$\begin{aligned}(g \circ f)(a_1 \circ_A a_2) &= g(f(a_1 \circ_A a_2)) = g(f(a_1) \circ_B f(a_2)) \\ &= g(b_1 \circ_B b_2) = g(b_1) \circ_C g(b_2) = (g \circ f)(a_1) \circ_C (g \circ f)(a_2)\end{aligned}$$

Dabei wurde in der zweiten Gleichung benutzt, dass $f$ strukturerhaltend ist, und in der vierten Gleichung, dass $g$ strukturerhaltend ist.

ii.) gilt, da $(g \circ f)(e_A) = g(e_B) = e_C$

Die Identität auf jedem Monoid $(M, \circ_M)$ ist die identische Abbildung
$id_M : M \to M$, die jedes Element auf sich selbst abbildet. Dann ist für jedes
$f : (A, \circ_A) \to (B, \circ_B)$ offenbar $id_B \circ f = f \circ id_A = f$.

## Aufgabe 3 - Musterlösung

a.) Zu zeigen ist: $u \circ g \circ f = t \circ h \circ f = t \circ r$.
Die erste Gleichung gilt, weil das Rechteck im Diagramm kommutiert, weil also gilt $u \circ g = t \circ h$.
Die zweite Gleichung gilt, weil das Dreieck im Diagramm kommutiert, weil also gilt $h \circ f = r$ .
(Die Assoziativität der Komposition wurde dabei benutzt).

b.) Zu zeigen ist: $s \circ r \circ t = s \circ h \circ f = g \circ f$.
Die erste Gleichung gilt, weil das Rechteck im Diagramm kommutiert, weil also gilt $t \circ t = h \circ f$.
Die zweite Gleichung gilt, weil das Dreieck im Diagramm kommutiert, weil also gilt $s \circ h = g$ .