Übungsblatt 1

Technische Hochschule Mittelhessen, Fachbereich MNI, Prof. Dr. B. Just
Kategorientheorie für Informatiker

Aufgabe 1

Bitte weisen Sie nach, dass es sich bei den folgenden Klassen von Objekten mit Pfeilen um Kategorien handelt:

a.) Objekte sind alle Mengen. Ein Pfeil von einer Menge M_1 zu einer Menge M_2 ist genau dann vorhanden, wenn gilt $M_1 \subseteq M_2$.

b.) Objekte sind die booleschen Funktionen auf zwei Variablen, also alle Funktionen $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$. Ein Pfeil von einer Funktion f_1 zu einer Funktion f_2 ist genau dann vorhanden, wenn für jeden Input $(x, y) \in \{0,1\}^2$ gilt: $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$.

c.) **Poset** sind die partially ordered sets. Objekte sind die Halbordnungen, Pfeile die isotonen (d.h. ordnungserhaltenden) Funktionen zwischen ihnen. D.h., ein Pfeil f von $(A, \leq_A)$ nach $(B, \leq_B)$ ist eine Abbildung $f : A \to B$, mit folgender Eigenschaft:
Für alle $a_1, a_2 \in A$ mit $a_1 \leq_A a_2$ gilt $f(a_1) \leq_B f(a_2)$.

Aufgabe 2

Ein Monoid $(M, \circ)$ ist eine Menge mit einer Verknüpfung, sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

i.) Die Verknüpfung ist assoziativ, d.h., für $a, b, c \in M$ ist $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.

ii.) Es gibt ein neutrales Element e, sodass für jedes $m \in M$ gilt $m \circ e = e \circ m = m$.

a.) Bitte zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}$ mit der normalen Multiplikation, also $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ein Monoid ist.

b.) Bitte zeigen Sie, dass für einen festen Datentyp T die Menge $L(T)$ der (endlich langen) Listen mit Elementen aus T mit der Verkettung ein Monoid ist.

c.) **Mon** ist die Kategorie der Monoide. Objekte sind die Monoide, Pfeile die Homomorphismen zwischen ihnen. D.h., ein Pfeil f von $(A, \circ_A)$ nach $(B, \circ_B)$ ist eine Abbildung $f : A \to B$, mit folgenden Eigenschaften:

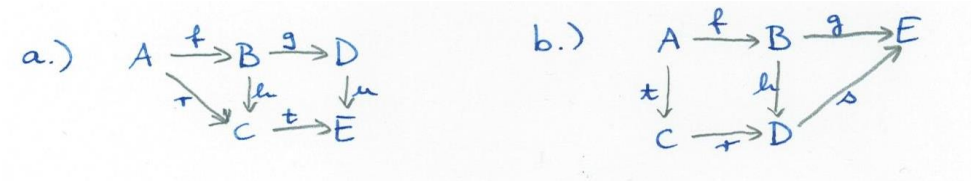
i.) Für alle $a_1, a_2 \in A$ ist $f(a_1 \circ_A a_2) = f(a_1) \circ_B f(a_2)$

ii.) Sind e_A bzw. e_B die neutralen Elemente von A bzw. B, so ist $f(e_A) = f(e_B)$.

Bitte weisen Sie nach, dass **Mon** eine Kategorie ist.

Aufgabe 3

Bitte zeigen Sie: Kommutiert in folgenden Diagrammen das Dreieck und das Rechteck, so kommutiert das Gesamtdiagramm.



Viel Spaß und Erfolg!