Übungsblatt 2 - Musterlösung

Technische Hochschule Mittelhessen, Fachbereich MNI, Prof. Dr. B. Just, Dr. R. Euler
Kategorientheorie für Informatiker

Aufgabe 1 - Musterlösung

a.) Seien 0 und $0'$ initiale Objekte einer Kategorie. Dann gibt es genau einen Pfeil $f : 0 \to 0'$ und genau einen Pfeil $g : 0' \to 0$. Für die beiden initialen Objekte 0 und $0'$ existiert jeweils ein Identitätspfeil, nämlich id_0 und $id_{0'}$. Es kann aber auch keine weiteren Pfeile geben, die von 0 bzw. $0'$ auf sich zeigen, da ansonsten 0 bzw. $0'$ nicht initial wären. Da für die Kompositionen aber gilt, $g \circ f : 0 \to 0$ und $f \circ g : 0' \to 0'$, muss $g \circ f = id_0$ und $f \circ g = id_{0'}$ sein. Damit sind die Isomorphiebedingungen erfüllt.

b.) Analog zu a.) nämlich: Seien 1 und $1'$ terminale Objekte einer Kategorie. Dann gibt es genau einen Pfeil $f : 1 \to 1'$ und genau einen Pfeil $g : 1' \to 1$. Für die beiden terminalen Objekte 1 und $1'$ existiert jeweils ein Identitätspfeil, nämlich id_1 und $id_{1'}$. Es kann aber auch keine weiteren Pfeile geben, die von 1 bzw. $1'$ auf sich zeigen, da ansonsten 1 bzw. $1'$ nicht terminal wären. Da für die Kompositionen aber gilt, $g \circ f : 1 \to 1$ und $f \circ g : 1' \to 1'$, muss $g \circ f = id_1$ und $f \circ g = id_{1'}$ sein. Damit sind die Isomorphiebedingungen erfüllt.

Aufgabe 2 - Musterlösung

a.) Angenommen es gäbe Pfeile $r, s : E \to F$.

Sei 1 ein terminales Objekt und der Pfeil $f : F \to 1$ sei monic. Dann sind die Kompositionspfeile erklärt, nämlich $f \circ r, f \circ s : E \to 1$. Da es von E nach 1 nur einen Pfeil geben kann, gilt:

$$f \circ r = f \circ s$$

Es kann gekürzt werden, weil f ein Monomorphismus ist, und es folgt:

$$r = s$$

Damit kann von jedem Objekt E der Kategorie höchstens ein Pfeil nach F zeigen. Da die Pfeile von jedem Objekt F der Kategorie nach 1 monic sind, ist die Aussage bewiesen.

Sei 0 ein initiales Objekt und der Pfeil $f : 0 \to E$ sei epic. Dann sind die Kompositionspfeile erklärt, nämlich $r \circ f, s \circ f : 0 \to F$. Da es von 0 nach F nur einen Pfeil geben kann, gilt:

$$r \circ f = s \circ f$$

Es kann gekürzt werden, weil f ein Epimorphismus ist, und es folgt:

$$r = s$$

Damit kann von jedem Objekt E der Kategorie höchstens ein Pfeil nach F zeigen. Da die Pfeile von 0 zu jedem Objekt E der Kategorie epic sind, ist die Aussage bewiesen.

b.) Es seien $f : B \to C$ ein Isomorphismus und $g, h : A \to B$ Morphismen. Angenommen es gelte $f \circ g = f \circ h$.

Da f ein Isomorphismus ist, gibt es einen zu f inversen Morphismus f^{-1}. Verknüpfung links mit f^{-1} führt zu folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ (f \circ g) &= f^{-1} \circ (f \circ h) && \Leftrightarrow \\ (f^{-1} \circ f) \circ g &= (f^{-1} \circ f) \circ h && \Leftrightarrow \\ id_B \circ g &= id_B \circ h && \Leftrightarrow \\ g &= h \end{aligned}$$

also ist f monic.

Es seien $f : B \to C$ ein Isomorphismus und $g, h : C \to D$ Morphismen. Angenommen es gelte $g \circ f = h \circ f$.

Da f ein Isomorphismus ist, gibt es einen zu f inversen Morphismus f^{-1}. Verknüpfung rechts mit f^{-1} führt zu folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} (g \circ f) \circ f^{-1} &= (h \circ f) \circ f^{-1} && \Leftrightarrow \\ g \circ (f \circ f^{-1}) &= h \circ (f \circ f^{-1}) && \Leftrightarrow \\ g \circ id_C &= h \circ id_C && \Leftrightarrow \\ g &= h \end{aligned}$$

also ist f epic.

Aufgabe 3 - Musterlösung

Mit der Bezeichnung $g_{XY} : X \to Y$ gelten folgende Umformungen:

$$\begin{aligned} (g_{BB'} \circ g_{AB}) \circ f &= g_{BB'} \circ (g_{AB} \circ f) && \text{Assoziativgesetz} \\ &= g_{BB'} \circ (g_{DB} \circ g_{CD}) && \text{obere Seite kommutiert} \\ &= (g_{BB'} \circ g_{DB}) \circ g_{CD} && \text{Assoziativgesetz} \\ &= (g_{D'B'} \circ g_{DD'}) \circ g_{CD} && \text{rechte Seite kommutiert} \\ &= g_{D'B'} \circ (g_{DD'} \circ g_{CD}) && \text{Assoziativgesetz} \\ &= g_{D'B'} \circ (g_{C'D'} \circ g_{CC'}) && \text{hintere Seite kommutiert} \\ &= (g_{D'B'} \circ g_{C'D'}) \circ g_{CC'} && \text{Assoziativgesetz} \\ &= (g_{A'B'} \circ g_{C'A'}) \circ g_{CC'} && \text{untere Seite kommutiert} \\ &= g_{A'B'} \circ (g_{C'A'} \circ g_{CC'}) && \text{Assoziativgesetz} \\ &= g_{A'B'} \circ (g_{AA'} \circ f) && \text{linke Seite kommutiert} \\ &= (g_{A'B'} \circ g_{AA'}) \circ f && \text{Assoziativgesetz} \end{aligned}$$

Da f ein Isomorphismus und somit auch ein Epimorphismus ist, darf gekürzt werden. Also gilt:

$$g_{BB'} \circ g_{AB} = g_{A'B'} \circ g_{AA'},$$

Das heißt, die Vorderfläche kommutiert auch.

Aufgabe 4 - Musterlösung

In der Kategorie Mon der Monoide mit den strukturerhaltenden Abbildungen als Pfeil sei $(\{e\}, \circ_{\{e\}})$ das triviale Monoid, welches nur aus dem neutralen Element e besteht.

Es geht von jedem Objekt $(M, \circ_M)$ ein Pfeil f_{M_e} aus mit $f_{M_e} : M \to \{e\}, \quad g \mapsto e$ für alle $g \in M$. Diese konstante Abbildung ist strukturerhaltend, denn es gilt:

$$\begin{aligned} f_{M_e}(g) \circ_{\{e\}} f_{M_e}(h) &= e \circ_{\{e\}} e \\ &= e \\ &= f_{M_e}(g \circ_M h) \end{aligned}$$

Weitere Pfeile von M nach $\{e\}$ kann es nicht geben, da die Codomain einelementig ist. Also ist das triviale Monoid $(\{e\}, \circ_{\{e\}})$ ein terminales Objekt.

Vom trivialen Monoid $(\{e\}, \circ_{\{e\}})$ geht andererseits auch umgekehrt genau ein Pfeil zu jedem Objekt $(M, \circ_M)$ der Kategorie Mon.
Betrachten dazu den Pfeil: $i_M : \{e\} \to M, \quad e \mapsto c$. Da i_M ein strukturerhaltender Pfeil sein soll, gilt definitionsgemäß, dass das Bild des neutralen Elements der Domain das neutrale Element der Codomain ist, also $c = e_M$. Der Pfeil i_M ist daher eindeutig und das triviale Monoid $(\{e\}, \circ_{\{e\}})$ somit initiales Objekt und daher sogar Nullobjekt.

Zusatzaufgabe - Musterlösung

a.) Wir zeigen, dass $(G, \circ)$ eine 1-Objekt Kategorie ist.

Die Abbildung $h^* : G \to G, \quad g \mapsto h \circ g \circ h^{-1}$ ist strukturerhaltend, denn mit $g_1, g_2 \in G$ gilt:

$$\begin{aligned} h^*(g_1) \circ h^*(g_2) &= (h \circ g_1 \circ h^{-1}) \circ (h \circ g_2 \circ h^{-1}) \\ &= h \circ g_1 \circ (h^{-1} \circ h) \circ g_2 \circ h^{-1} = h \circ (g_1 \circ g_2) \circ h^{-1} \end{aligned}$$

Die Komposition zweier Pfeile $h_1^* : G \to G$ und $h_2^* : G \to G$ sei definiert als die Hintereinaderausführung $h_2^* \bullet h_1^* : G \to G$.
Für $g \in G$ gilt:

$$\begin{aligned} h_2^* \bullet h_1^*(g) &= h_2 \circ (h_1 \circ g \circ h_1^{-1}) \circ h_2^{-1} \\ &= (h_2 \circ h_1) \circ g \circ (h_1^{-1} \circ h_2^{-1}) \\ &= (h_2 \circ h_1) \circ g \circ (h_2 \circ h_1)^{-1} \end{aligned}$$

Da das Gruppenelement $h_2 \circ h_1$ existiert, gibt es auch den Kompositionspfeil $(h_2 \circ h_1)^* : G \to G$ mit $(h_2 \circ h_1)^* = h_2^* \bullet h_1^*$

Assoziativität der Verknüpfung $\bullet$
Betrachten Pfeile h_1^*, h_2^* und h_3^* aus der 1-Objekt Kategorie $(G, \circ)$. Es ist

$$\begin{aligned} h_3^* \bullet (h_2^* \bullet h_1^*) &= h_3^* \bullet (h_2 \circ h_1)^* \\ &= [h_3 \circ (h_2 \circ h_1)]^* \\ &= [(h_3 \circ h_2) \circ h_1]^* \\ &= (h_3 \circ h_2)^* \bullet h_1^* \\ &= (h_3^* \bullet h_2^*) \bullet h_1^* \end{aligned}$$

Existenz eines Identitätspfeils id_G
Es ist $id_G = e^*$, denn

$$\begin{aligned} e^* \bullet h^* = (e \circ h)^* &= h^* \\ h^* \bullet e^* = (h \circ e)^* &= h^* \end{aligned}$$

b.) Zu jedem Pfeil h^* gibt es einen zum inversen Gruppenelement gehörenden Pfeil $(h^{-1})^*$. Wir zeigen, dass der zu h^* inverse Morphismus dieser Pfeil $(h^{-1})^*$ ist.
Es ist für jedes $g \in G$

$$\begin{aligned} (h^{-1})^* \bullet h^*(g) &= h^{-1} \circ (h \circ g \circ h^{-1}) \circ h \\ &= (h^{-1} \circ h) \circ g \circ (h^{-1} \circ h) \\ &= e \circ g \circ e \\ &= g \\ &= id_G(g) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} h^* \bullet (h^{-1})^*(g) &= h \circ (h^{-1} \circ g \circ h) \circ h^{-1} \\ &= (h \circ h^{-1}) \circ g \circ (h \circ h^{-1}) \\ &= e \circ g \circ e \\ &= g \\ &= id_G(g) \end{aligned}$$

Damit existiert mit $(h^{-1})^* = (h^*)^{-1}$ ein zu h^* inverser Morphismus. Also ist h^* ein Isomorphismus für jedes $h \in G$.

c.) Sei G eine abelsche Gruppe, dann gilt:

$$\begin{aligned} h^*(g) &= h \circ g \circ h^{-1} \\ &= h \circ (g \circ h^{-1}) \\ &= h \circ (h^{-1} \circ g) \\ &= (h \circ h^{-1}) \circ g \\ &= e \circ g \\ &= g \\ &= id_G(g) = e^*(g) \end{aligned}$$