Übungsblatt 3 - Musterlösung

Technische Hochschule Mittelhessen, Fachbereich MNI, Prof. Dr. B. Just
Kategorientheorie für Informatiker

Aufgabe 1 - Musterlösung

a.) Nach Definition sind die Objekte die Aussagen, und ein Pfeil von einer Aussage $A1$ zu einer Aussage $A2$ ist genau dann vorhanden, wenn gilt $A1 \Rightarrow A2$.

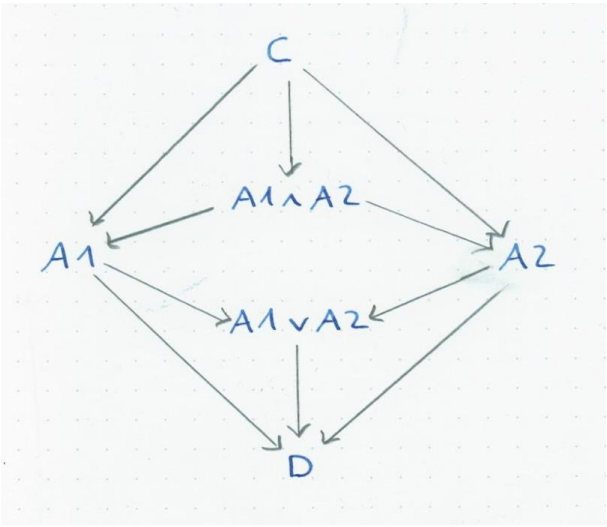
Die Komposition zweier Pfeile $A1 \Rightarrow A2$ und $A2 \Rightarrow A3$ ist der Pfeil $A1 \Rightarrow A3$. Dieser ist in der Kategorie vorhanden, denn mit $A1 \Rightarrow A2$ und $A2 \Rightarrow A3$ gilt auch $A1 \Rightarrow A3$.

Das Assoziativgesetz gilt, denn mit den beliebigen Pfeilen $f : A1 \to A2$, $g : A2 \to A3$, $h : A3 \to A4$ gilt $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, weil beides der Pfeil ist, der zur Folgerung $A1 \Rightarrow A4$ gehört.

Für eine beliebige Aussage A ist id_A der Pfeil, der aussagt, dass eine Aussage aus sich selbst folgt. Von rechts oder links verknüpft, ändert er eine andere Folgerung nicht.

b.) Das kategrielle Produkt der Aussagen $A1$ und $A2$ ist die Aussage $A1 \wedge A2$. Denn es gilt $(A1 \wedge A2) \Rightarrow A1$ (daher gibt es den Projektionspfeil nach links), und es gilt $(A1 \wedge A2) \Rightarrow A2$ (daher gibt es den Projektionspfeil nach rechts).
Ist weiter C eine beliebige Aussage, aus der sowohl $A1$ als aus $A2$ folgt, so folgt aus C auch $A1 \wedge A2$.

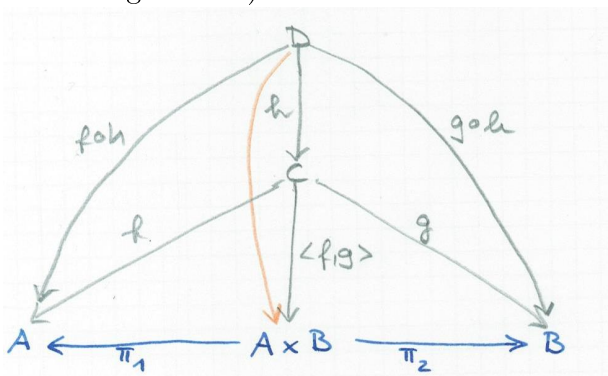
c.) Das kategorielle Coprodukt der Aussagen $A1$ und $A2$ ist die Aussage $A1 \vee A2$. Denn es gilt $A1 \Rightarrow (A1 \vee A2)$ (daher gibt es den Injektionspfeil von links), und es gilt $A2 \Rightarrow (A1 \vee A2)$ (daher gibt es den Injektionspfeil von rechts).
Ist weiter D eine beliebige Aussage, die sowohl aus $A1$ als auch aus $A2$ folgt, so folgt D auch aus $A1 \vee A2$.



□

Aufgabe 2 - Musterlösung

Da von einem Arrow $\langle *, * \rangle$ in spitzen Klammern die Rede ist, muss es ein Produktobjekt geben. Sei dieses $A \times B$, zusammen mit den Projektionen π_1 und π_2 (in der Zeichnung in blau).



a.) Weiter gibt es Arrows f und g mit gemeinsamer Domain, genannt C, und ein h mit codomain C und D genannter domain D, sodass die Verknüpfungen $f \circ h$ und $g \circ h$ definiert sind (in der Zeichnung mit Bleistift).

Nun ist $\langle f \circ h \ , \ g \circ h \rangle$ der eindeutige Pfeil r von D nach $A \times B$ mit

$\pi_1 \circ r = f \circ h$ und $\pi_2 \circ r = g \circ h$.
(Eindeutig, weil $A \times B$ ein Produkt ist - in der Zeichnung in rot).

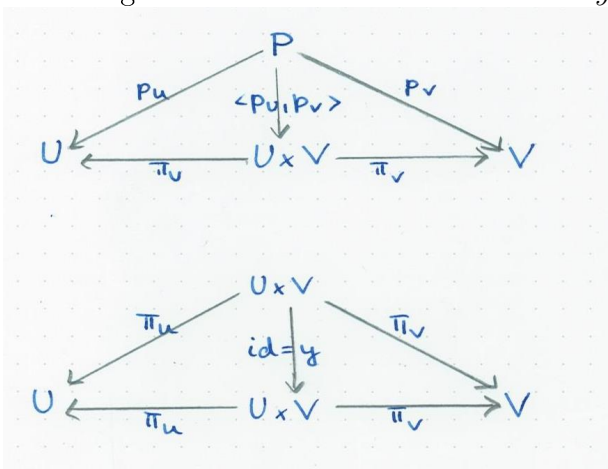
Diese Eigenschaften hat auch die Komposition $\langle f, g \rangle \circ h$. Denn es ist

$\pi_1 \circ \langle f, g \rangle \circ h = (\pi_1 \circ \langle f, g \rangle) \circ h = f \circ h$ und

$\pi_2 \circ \langle f, g \rangle \circ h = (\pi_2 \circ \langle f, g \rangle) \circ h = g \circ h$

Somit gilt $\langle f \circ h \ , \ g \circ h \rangle = \langle f, g \rangle \circ h$.

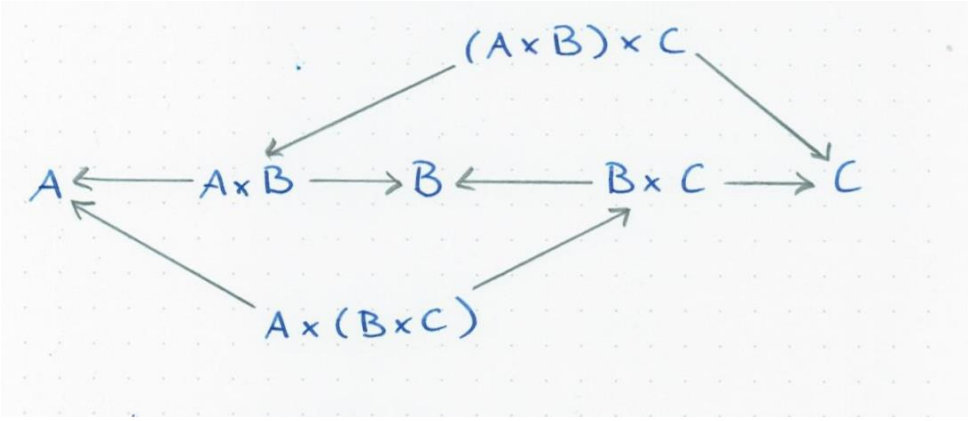
b.) Da $U \times V$ Produktobjekt ist, gibt es für jedes Objekt P und Pfeile $p_U : P \to U$ und $p_V : P \to V$ genau einen Pfeil $< p_u, p_v >: P \to (U \times V)$ mit $p_U = \pi_U \circ < p_U, p_V >$ und $p_V = \pi_V \circ < p_U, p_V >$.
Wir wenden das an auf $P = U \times V$, $p_U = \pi_U$ und $p_V = \pi_V$.
$y = id_{u \times V}$ erfüllt die Gleichungen $\pi_U \circ y = \pi_U$ und $\pi_V \circ y = \pi_V$, und wegen der Eindeutigkeit kann es keinen anderen Pfeil y geben.



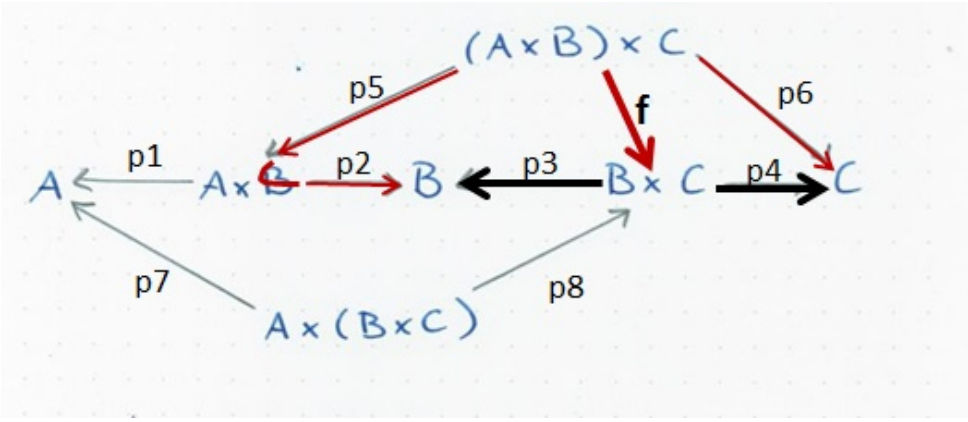
□

Aufgabe 3 - Musterlösung

i.) Das folgende Diagramm zeigt die vorkommenden Objekte und Pfeile:

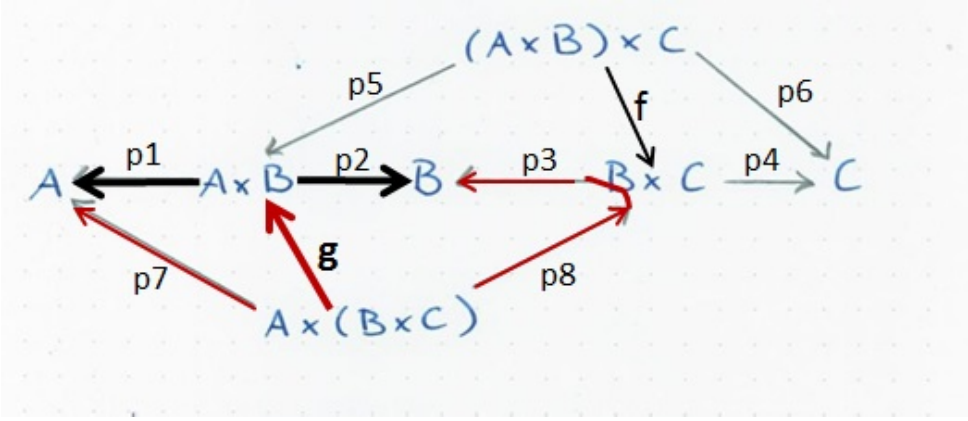


ii.) In den folgenden Diagrammen wurden alle vorhandenen Projektionspfeile mit Namen $p..$ versehen, und, wenn sie an einer Überlegung beteiligt sind, dick schwarz hervorgehoben.
Das folgende Diagramm zeigt, warum es einen Pfeil $f : (A \times B) \times C \to B \times C$ geben muss, sodass das Diagramm mit dem Pfeil kommutiert:



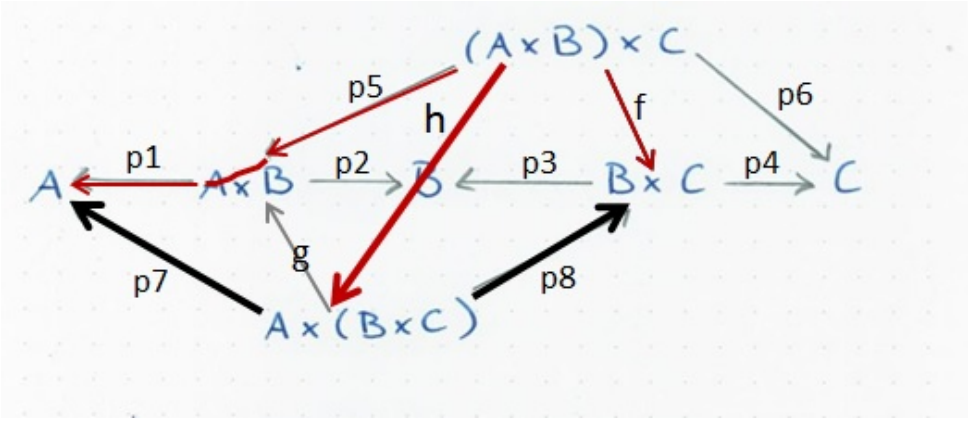
Da $B \times C$ ein Produktobjekt mit Projektionspfeilen $p3$ und $p4$ ist, und $X = (A \times B) \times C$ ein Objekt ist, das die Domain zweier Pfeile $p2 \circ p5$ und $p6$ mit Codomain B bzw. C ist, muss es wegen der universellen Eigenschaft von $B \times C$ einen eindeutigen Pfeil f geben, sodass das Diagramm kommutiert.
Es ist $p4 \circ f = p6$ und $p3 \circ f = p2 \circ p5$, und f ist eindeutig mit diesen Eigenschaften.

iii.) Analog zeigt das folgende Diagramm, warum es einen Pfeil $g : A \times (B \times C) \to A \times B$ geben muss, sodass das Diagramm mit dem Pfeil kommutiert:



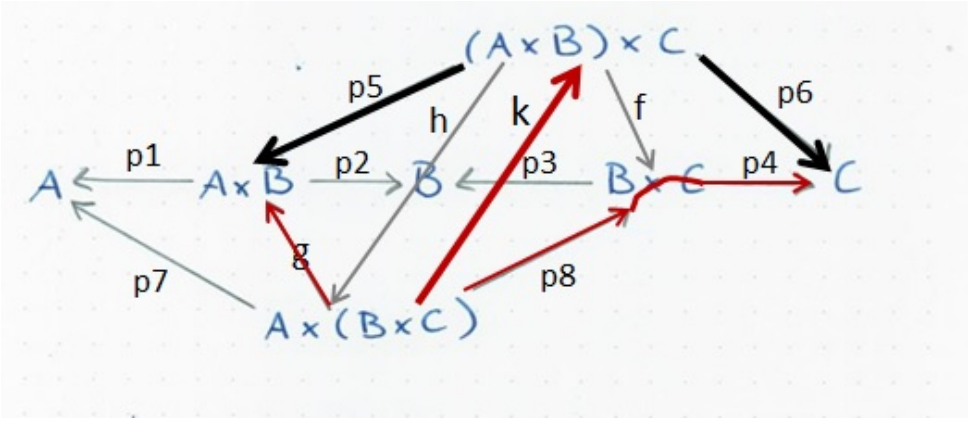
Es ist $p1 \circ g = p7$ und $p2 \circ g = p3 \circ p8$, und g ist eindeutig mit diesen Eigenschaften.

iv.) Das folgende Diagramm zeigt, warum es wegen der universellen Eigenschaftes des Produkte $A \times (B \times C)$ einen Pfeil $h : (A \times B) \times C \to A \times (B \times C)$ geben muss, sodass das Diagramm kommutiert:



Es ist $p7 \circ h = p1 \circ p5$ und $p8 \circ h = f$, und h ist eindeutig mit diesen Eigenschaften.

Analog zeigt das folgende Diagramm zeigt, warum es wegen der universellen Eigenschaftes des Produkte $(A \times B) \times C$ einen Pfeil $k : A \times (B \times C) \to (A \times B) \times C$ geben muss, sodass das Diagramm kommutiert:



Es ist $p6 \circ k = p4 \circ p8$ und $p5 \circ k = g$, und h ist eindeutig mit diesen Eigenschaften.

v.) Insgesamt kommutiert also das folgende Diagramm:

$$
\begin{tikzcd}
 & & (A\times B)\times C \arrow[dll, "p5"'] \arrow[dl, shift right, "h"'] \arrow[dr, shift left, "k"] \arrow[drr, "p6"] \arrow[d, "f"] & & \\
A & A\times B \arrow[l, "p1"'] \arrow[r, "p2"] & B & B\times C \arrow[l, "p3"'] \arrow[r, "p4"] & C \\
 & & A\times(B\times C) \arrow[ul, "p7"] \arrow[u, shift right, "g"'] \arrow[ur, "p8"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Mit Aufgabe 2.b. ist der Pfeil $h \circ k$ die Identität auf $A \times (B \times C)$, weil er in einem kommutiven Diagramm als Domain und Codomain das gleiche Produktobjekt hat. Mit derselben Überlegung sieht man, dass der Pfeil $k \circ h$ die Identität auf $(A \times B) \times C$ ist. $\square$

Aufgabe 4 - Musterlösung

a.) Zweifaches Umkehren der Pfeilrichtungen liefert wieder die Originalpfeile.

b.) Laut Definition ist das Objekt I einer Kategorie initial, wenn es für jedes Objekt X der Kategorie genau einen Pfeil $p_X : I \to X$ gibt. Ein Objekt T ist genau dann terminal, wenn es für jedes Objekt X der Kategorie genau einen Pfeil $q_X : X \to T$ gibt.
Man sieht, dass man eine Definition aus der anderen erhält, indem man die Pfeilrichtungen umkehrt.

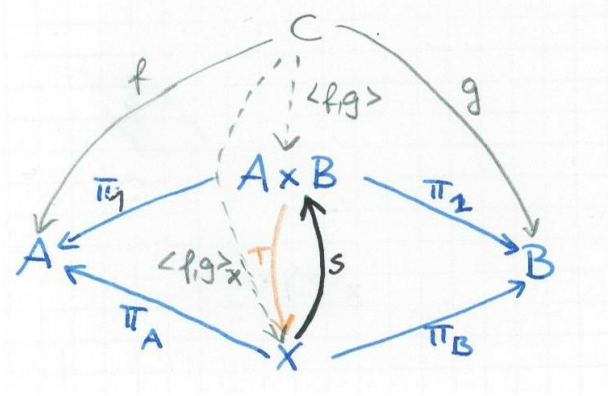
c.) Ein Produkt von zwei Objekten A und B einer Kategorie ist laut Definition ein Objekt $A \times B$, zusammen mit zwei Projektionspfeilen $\pi_1 : A \times B \to A$ und $\pi_2 : A \times B \to B$, sodass für jedes Objekt C der Kategorie, und jedes Paar (f, g) mit $f : C \to A$ und $g : C \to B$ genau ein sogenannter „mediating arrow“ $\langle f, g\rangle : C \to A \times B$ existiert, sodass das Diagramm auf der linken Seite kommutiert:

$$
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\langle f,g\rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\
A & A\times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & C & \\
A \arrow[ur, "f^{op}"] \arrow[r, "i_1"'] & A+B \arrow[u, "{[f^{op},g^{op}]}"] & B \arrow[ul, "g^{op}"'] \arrow[l, "i_2"]
\end{tikzcd}
$$

Durch Umkehren aller Pfeilrichtungen sieht man im rechten Diagramm, dass in der dualen Kategorie dann für das Objekt $A \times B$, zusammen mit den beiden Injektionspfeilen $i_1 = \pi_1^{op} : A \times B \to A$ und $i_2 = \pi_2^{op} : A \times B \to B$ gilt: Für jedes Objekt C der dualen Kategorie, und jedes Paar (f^{op}, g^{op}) mit $f^{op} : A \to C$ und $g^{op} : B \to c$ gibt es genau einen sogenannten „mediating arrow“ $[f^{op}, g^{op}] = \langle f, g\rangle^{op} : A \times B \to C$ existiert, sodass das Diagramm auf der rechten Seite kommutiert, wobei $A \times B$ jetzt in $A + B$ umbenannt wurde. $\square$

Aufgabe 5 - Musterlösung

a.) Es sei X neben $A \times B$ ein weiteres Produkt von A und B.
Das heißt, es gibt Projektionspfeile $\pi_A : X \to A$ und $\pi_B : X \to B$, sodass für alle C in der Kategorie und alle Paare (f, g) mit $f : C \to A$ und $g : C \to B$ genau ein sogenannter „mediating arrow“ $\langle f, g \rangle_X : C \to X$ existiert, sodass das folgende Diagramm kommutiert, wobei die Pfeile „rot“ $r : X \to A \times B$ und „schwarz“ $s : A \times B \to X$ weiter unten erklärt werden:



Wir zeigen, dass $A \times B$ und X isomorph sind, durch folgende Schritte:

- Es gibt genau einen Arrow, r, von $A \times B$ nach X. Denn setzt man $C = A \times B$, so sieht man, dass es genau einen Pfeil von $A \times B$ nach X gibt, weil X ein Produkt von A und B ist.

- Es gibt genau einen Arrow, s, von X nach $A \times B$. Denn setzt man $C = X$, so sieht man, dass es genau einen Pfeil von X nach $A \times B$ gibt, weil $A \times B$ ein Produkt von A und B ist.

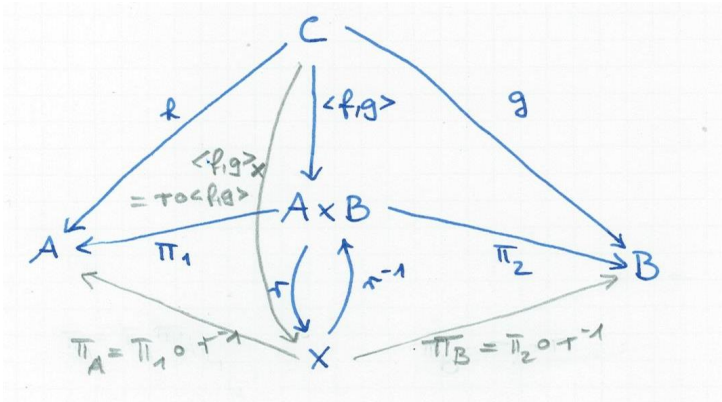
- Außer den Identitäten gibt es keine weiteren Pfeile von $A \times B$ in sich, bzw. von X in sich. Das folgt aus der Produkteigenschaft, indem man $C = A \times B$ bzw. $C = X$ setzt.

Damit folgt aus der Kommutativität des Diagramms, dass r und s invers zueinander sind. Es gilt $r \circ s = id_X$ und $s \circ s = id_{A \times B}$.

b.) Sei X isomorph zu $A \times B$. D.h., es existiert ein $r : A \times B \to X$ mit einem Inversen $r^{-1} : X \to A \times B$ (dessen Komposition mit r jeweils die Identität ergibt).

Wir zeigen: Es gibt zwei Arrows $\pi_A : X \to A$ und $\pi_B : X \to B$, sodass für alle Objekte C der Kategorie, und alle Arrowpaare (f, g) mit $f : C \to A,\ g : C \to B$ ein eindeutiger Arrow $\langle f, g \rangle_X : C \to X$ exitiert, sodass gilt:

$$f = \pi_A \circ \langle f, g \rangle_X \text{ und } g = \pi_B \circ \langle f, g \rangle_X \ .$$



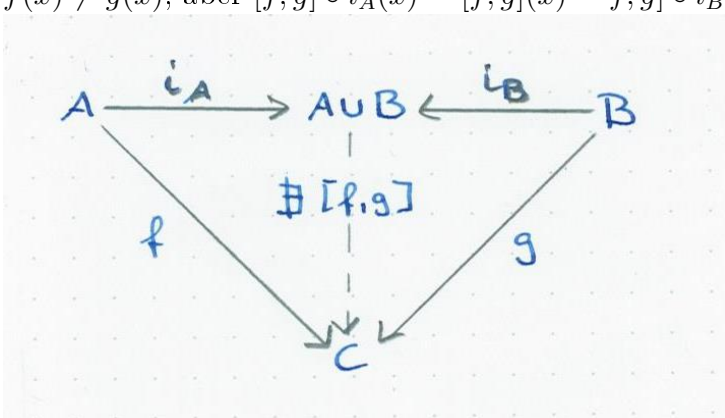
Setzt man $\pi_A = \pi_1 \circ r^{-1} : X \to A$ und $\pi_B = \pi_2 \circ r^{-1} : X \to B$,
so erfüllt $\langle f, g\rangle_X = r \circ \langle f, g\rangle$ offenbar
$f = \pi_A \circ \langle f, g\rangle_X$ und $g = \pi_B \circ \langle f, g\rangle_X$.

Zu zeigen ist noch die Eindeutigkeit von $\langle f, g\rangle_X$.
Diese gilt, weil $\langle f, g\rangle$ eindeutig ist, und r^{-1} für feste π_A, π_B ebenfalls eindeutig ist (da $A \times B$ ein kategorielles Produkt ist).

c.) Die Aussagen für Coprodukte erhält man, indem man die Aussagen a.) und b.) auf die duale Kategorie anwendet. □

Aufgabe 6 - Musterlösung

a.) Es seien A und B Mengen mit nichtleerer Schnittmenge, $x \in A \cap B$, C eine weitere Menge, und $f : A \to C$, $g : B \to C$ Abbildungen mit $F(x) \neq g(x)$. Dann kann es keine Funktion $[f, g] : A \cup B \to C$ mit $f = [f, g] \circ i_A$ und $g = [f, g] \circ i_B$. Denn es ist $f(x) \neq g(x)$, aber $[f, g] \circ i_A(x) = [f, g](x) = f, g] \circ i_B(x)$.



b.) Seien A, B, C Mengen.
Es ist

$$A \times (B + C) = \{(a, (1, b)) : a \in A, b \in B\} \cup \{(a, (2, c)) : a \in A, c \in C\} \quad \text{und}$$
$$(A \times B) + (A \times C) = \{(1, (a, b)) : a \in A, b \in B\} \cup \{(2, (a, c)) : a \in A, c \in C\}.$$

Der Isomorphismus von $A \times (B + C)$ nach $(A \times B) + (A \times C)$ ist gegeben durch die Abbildungsvorschrift
$(a, (1, b)) \mapsto (1, (a, b))$ und $(a, (2, c)) \mapsto (2, (a, c))$, mit der inversen Abbilgung
$(1, (a, b)) \mapsto (a, (1, b))$ und $(2, (a, c)) \mapsto (a, (2, c))$.
Offensichtlich ist die Komposition die Identität. □

Aufgabe 7 - Musterlösung

Zur Erinnerung: Für zwei beliebige Mengen A, B ist die disjunkte Vereinigung $A \sqcup B$ definiert als

$$A \sqcup B = \{(1, a) : a \in A\} \cup \{(2, b) : b \in B\}.$$

Seien nun $(P, \leq_P)$ und $(Q, \leq_Q)$ zwei Objekte der Kategorie **Poset**. Dann kann man auf $P \sqcup Q$ eine Ordnungsrelation $\leq_{P \sqcup Q}$ definieren durch:

i.) $(1, p_1) \leq_{P \sqcup Q} (1, p_2)$ für $p_1, p_2 \in P$ genau dann, wenn $p_1 \leq_P p_2$;

ii.) $(2, q_1) \leq_{P \sqcup Q} (2, q_2)$ für $q_1, q_2 \in Q$ genau dann, wenn $q_1 \leq_Q q_2$;

iii.) $(1, p)$ und $(2, q)$ stehen für kein Paar (p, q) in Relation.

Satz: Seien $(P, \leq_P)$ und $(Q, \leq_Q)$ zwei Objekte der Kategorie **Poset**, so ist ihr Coprodukt das Objekt $(P \sqcup Q, \leq_{P \sqcup Q})$.

Beweis: Es sei $i_P : (P, \leq_P) \to (P \sqcup Q, \leq_{P \sqcup Q})$ die Abbildung, die jedem $p \in P$ das Paar $(1, p) \in P \sqcup Q$ zuordnet. Offenbar ist i_P ordnungserhaltend.
Weiter sei $i_Q : (Q, \leq_Q) \to (P \sqcup Q, \leq_{P \sqcup Q})$ die Abbildung, die jedem $q \in Q$ das Paar $(2, q) \in P \sqcup Q$ zuordnet. Offenbar ist auch i_Q ordnungserhaltend.

Sei $(R, \leq_R)$ ein weiteres Objekt von **Poset**. Seien $f : (P, \leq_P) \to (R, \leq_R)$ und $g : (Q, \leq_Q) \to (R, \leq_R)$ beliebige ordnungserhaltende Abbildungen, also Pfeile in **Poset**.

Wir müssen zeigen, dass dann eine eindeutige ordnungserhaltende Abbildung $[f, g] : (P \sqcup Q, \leq_{P \sqcup Q}) \to (R, \leq_R)$ existiert, für die gilt: $i_p \circ [f, g] = f$ und $i_q \circ [f, g] = g$.

$$\begin{tikzcd}
(P, \leq_P) \arrow[r, "p \mapsto (1,p)"] \arrow[dr, "f"'] & (P \sqcup Q, \leq_{P \sqcup Q}) \arrow[d, "{[f,g] = \begin{cases} (1,p) \mapsto f(p) \\ (2,q) \mapsto g(q) \end{cases}}"] & (Q, \leq_Q) \arrow[l, "q \mapsto (2,q)"'] \arrow[dl, "g"] \\
& (R, \leq_R) &
\end{tikzcd}$$

Definiert man $[f, g]((1, p)) = f(p)$ und $[f, g]((2, q)) = g(q)$ für alle $p \in P, q \in Q$, so hat $[f, g]$ offenbar diese beiden Eigenschaften.

Außerdem ist $[f, g]$ eindeutig, denn jede Abbildung $r : (P \sqcup Q, \leq_{P \sqcup Q}) \to (R, \leq_R)$, für die das Diagramm kommutiert, muss erfüllen: $r((1, p)) = f(p)$ und $r((2, q)) = g(q)$ für alle $p \in P, q \in Q$, also $r = [f, g]$. $\square$