Übungsblatt 3

Technische Hochschule Mittelhessen, Fachbereich MNI, Prof. Dr. B. Just
Kategorientheorie für Informatiker

Aufgabe 1

Betrachtet wird die Kategorie AUSSAGEN, deren Objekte Aussagen (in einer beliebigen Sprache) sind. Ein Pfeil von Aussage $A1$ nach Aussage $A2$ ist genau dann vorhanden, wenn $A2$ aus $A1$ folgt, wenn also gilt $A1 \Rightarrow A2$.

So gibt es z.B. zwischen vom Objekt „Alle Menschen haben ein Herz AND Sokrates ist ein Mensch“ zum Objekt „Sokrates hat ein Herz“ einen Pfeil. Die Operatoren der booleschen Algebra dürfen benutzt werden.

a.) Bitte weisen Sie nach, dass AUSSAGEN eine Kategorie ist.

b.) Welche Aussage ist das kategorielle Produkt zweier Aussagen $A1$ und $A2$?

c.) Welche Aussage ist die kategorielle Summe zweier Aussagen $A1$ und $A2$?.

Aufgabe 2

a.) Bitte zeigen Sie, dass in einer Kategorie mit Produkten für Pfeile f, g und h, mit passender Domain und Codomain, sodass die Verknüpfungen und Produkte gebildet werden können, gilt:

$$\langle f \circ h \ , \ g \circ h \rangle = \langle f, g \rangle \circ h$$

Hinweis: Zeichnen Sie als erstes ein Diagramm :).

b.) Bitte zeigen Sie, dass für ein Produktobjekt $U \times V$ mit Projektionspfeilen $\pi_U : (U \times V) \to U$ und $\pi_V : (U \times V) \to V$ der Identitätspfeil $id_{U \times V}$ der einzige Pfeil y ist mit $\pi_U \circ y = \pi_U$ und $\pi_V \circ y = \pi_V$.

Aufgabe 3

Bitte zeigen Sie die Assoziativität des kategoriellen Produktes. D.h., zu zeigen ist, dass, sofern alle vorkommenden Produkte in der Kategorie vorhanden sind, für alle Objekte A, B, C gilt:

$$(A \times B) \times C \simeq A \times (B \times C).$$

Hinweis zum Vorgehen (bitte nur Schritt für Schritt lesen)

i.) Zeichnen Sie zunächst ein Diagramm mit den Objekten
$A,\ B,\ C,\ A \times B,\ B \times C,\ (A \times B) \times C,\ A \times (B \times C)$ und den Projektionspfeilen aller Produkte.

ii.) Leiten Sie her, dass es einen Pfeil $f : (A \times B) \times C \to B \times C$ geben muss, sodass das Diagramm mit diesem Pfeil kommutiert.

iii.) Leiten Sie her, dass es einen Pfeil $g : A \times (B \times C) \to A \times B$ geben muss, sodass das Diagramm mit diesem Pfeil immer noch kommutiert.

iv.) Leiten Sie her, dass es einen Pfeil $h : (A \times B) \times C \to A \times (B \times C)$ und einen Pfeil $k : A \times (B \times C) \to (A \times B)$ gibt, sodass das Diagramm immer noch kommutiert.

v.) Zeigen Sie abschließend unter Benutzung von Aufgabe 2.b., dass $h \circ k$ die Identität auf $(A \times B) \times C$ und $k \circ h$ die Identität auf $A \times (B \times C)$.

Auf der Rückseite kommen noch weitere Aufgaben.

Aufgabe 4

Zu einer Kategorie C ist die **duale Kategoie** C^{op} die Kategorie mit den Objekten von C, und den Pfeilen in die andere Richtung. D.h., Genau dann ist $f^{op} : B \to A$ ein Pfeil in C^{op}, wenn $f : A \to B$ ein Pfeil in C ist.

a.) Bitte begründen Sie, dass gilt $C^{op^{op}} = C$

b.) Bitte begründen Sie, das initiale Objekte in C terminale Objekte in C^{op} sind, und umgekehrt.

c.) Bitte begründen Sie, das Produkte in C Coprodukte in C^{op} sind, und umgekehrt.

Aufgabe 5

Bitte zeigen Sie, dass $A \times B$ und $A + B$ bis auf Isomorphie eindeutig sind. Zu zeigen ist also:

a.) Jedes Objekt X mit Pfeilen $\pi_A : X \to A$ und $\pi_B : X \to B$, das die Definition von „X ist ein Produkt von A und B“ erfüllt, isomorph zu $A \times B$ ist.

b.) Zeigen Sie, das jedes zu $A \times B$ isomorphe Objekt ein Produkt von A and B ist.

c.) a.) und b.) gelten ebenso für Coprodukte.

Aufgabe 6

a.) Warum ist in der Kategorie **Set** die normale Vereinigung, mit den Inklusionsabbildungen, die jedes Objekt auf sich abbilden, kein Coprodukt (die disjunkte Vereinigung ist eines)?

b.) Bitte zeigen Sie, indem Sie den Isomorphismus angeben, dass in **Set** das Distributivgesetz gilt:

$$A \times (B + C) \simeq (A \times B) + (A \times C)$$

Aufgabe 7

Es seien $(P, \leq_P)$ and $(Q, \leq_Q)$ Objekte in der Kategorie **Poset**. Bitte finden Sie ein Koprodukt von $(P, \leq_P)$ and $(Q, \leq_Q)$, und zeigen Sie, dass es eines ist.

Viel Spaß und Erfolg!