Übungsblatt 4 - Musterlösung

Technische Hochschule Mittelhessen, Fachbereich MNI, Prof. Dr. B. Just
Kategorientheorie für Informatiker

Aufgabe 1 - Musterlösung

a.) Es ist $\hat{g} : \mathbb{Z} \to \mathrm{Hom}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$, und für festes $z_0 \in \mathbb{Z}$ ist $\hat{g}(z_0)(n) = z_0 \cdot n$.

b.) Es ist $\hat{g} : \mathbb{Z} \to \mathrm{Hom}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$, und für festes $z_0 \in \mathbb{Z}$ ist $\hat{g}(z_0)(n) = z_0^n$.

c.) Es ist $\hat{g} : \{\text{Tiere}\} \to \mathrm{Hom}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$, und für festes $t \in \{\text{Tiere}\}$ ist $\hat{g}(t)(n) = n \mod (\text{Anzahl Beine von t})$.

d.) Es ist $\hat{g} : \{\text{Tiere}\} \to \mathrm{Hom}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$, und für festes $t \in \{\text{Tiere}\}$ ist $\hat{g}(t)(n) = n + (\text{Anzahl Beine von t})$.

Aufgabe 2 - Musterlösung

a.) $\mathrm{Hom}(A, B)$ mit der Evaluierungsfunktion $ev : \mathrm{Hom}(A, B) \times A$ ist das exponential Object zu A und B. Sind die Mengen A und B endlich, so ist auch $\mathrm{Hom}(A, B)$ endlich, also selbst ein Objekt aus **FSet**. Die Kommutativität des Diagramms für die Exponentiation gilt, weil sie in **Set** gilt.

b.) Ja, **FSet** ist eine CCC. Produkte sind die Kartesischen Pfodukte mit den Projektionspfeilen, exponential Objects sind die Homomorphismen (siehe Teil a.)), und terminale Objekte sind die einelementigen Mengen.

Aufgabe 3 - Musterlösung

a.) $(B \times D)^A$ sind die Abbildungen von A in das kartesische Produkt $B \times D$. Das sind genau die Abbildungen $\{f : A \to B\} \times \{h : A \to D\}$, also $B^A \times D^A$. Denn die Abbildungen in die erste und zweite Komponente können beliebig zu einer Abbildung ins kartesische Produkt kombiniert werden. Umgekehrt besteht jede Abbildung von A ins kartesische Produkt $B \times D$ aus einer ersten und einer zweiten Komponente. Formal kann man argumentieren, dass $(B \times D)^A$ und $B^A \times D^A$ endliche Mengen mit der gleichen Anzahl $(|B| \cdot |D|)^{|A|}$ sind, also sind sie isomorph.

b.) $(B^A)^D$ sind die Abbildungen $\mathrm{Hom}(D, \mathrm{Hom}(A, B))$. Allgemein gibt es für endliche Mengen X, Y insgesamt $|Y|^{|X|}$ unterschiedliche Abbildungen von X nach Y. Somit ist

$$|(B^A)^D| = |B^A|^{|D|} = (|B|^{|A|})^{|D|} = |B|^{|A| \cdot |D|} = |B|^{|A \times D|} = |B^{A \times D}|$$

Damit sind beide Mengen isomorph, weil sie gleich mächtig und endlich sind.

c.) Sei $f \in B^A \times B^D$, so ist $f = f_1 \times f_2$ mit $f_1 : A \to B,\ f_2 : D \to B$. Also definiert f eindeutig eine Abbildung $f' : (A + D) \to B$. Umgekehrt definiert jede Abbildung $f' : (A + D) \to B$ eindeutig zwei Abbildungen $f_1 : A \to B,\ f_2 : D \to B$, d.h., eine Abbildung $f_1 \times f_2 \in B^A \times B^D$. Die Zuordnung von f zu f' ist ein Isomorphismus. $\square$

Aufgabe 4 - Musterlösung

$(\mathbf{FSet}, \subseteq)$ ist keine CCC, denn es gibt keine exponential Objects.

Begründung: Für zwei endliche Mengen A, B ist das kategorielle Produkt in $(\mathbf{FSet}, \subseteq)$ ihre Schnittmenge $A \cap B$, zusammen mit den Projektionspfeilen, die aussagen, dass $A \cap B \subseteq A$ und $A \cap B \subseteq B$ gilt. Denn jede Menge C, die Teilmenge von A und Teilmenge von B ist, ist auch Teilmenge von $A \cap B$.

$$\begin{tikzcd} A & A \cap B \arrow[l] \arrow[r] & B \\ & C \arrow[ul] \arrow[u, dashed] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Angenommen, es gibt ein exponential Object X von A und B.
Dann muss es für jede endliche Menge C mit $C \cap A \subseteq B$ einen Pfeil von C nach X geben, sodass das Diagramm für die Exponentiation kommutiert.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\hat{g}"'] & X \cap A \arrow[l] \arrow[dr] & \\ & & B \\ C & C \cap A \arrow[l] \arrow[u, "\hat{g} \times id_A"'] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Wählt man jedoch eine Menge C mit $C \cap A \subseteq B$ und $|C| > |X|$, so kann nicht $C \subseteq X$ gelten, also gibt es keinen Pfeil von C nach X. Somit gibt es keine exponential Objects in $(\mathbf{FSet}, \subseteq)$. $\square$

Aufgabe 5 - Musterlösung

Zu zeigen ist, dass Zero-order-logic terminale Objekte, kategorielle Produkte und eine Exponentaition besitzt.
Das terminale Objekt ist die konstante Funktion 1. Denn für jeden Booleschen Ausdruck A gilt $A \Rightarrow 1$.

a.) Das kategorielle Produkt zweier Ausdrücke A und B ist die Konjunktion $A \wedge B$, zusammen mit den Projektionspfeilen, die $(A \wedge B) \Rightarrow A$ und $(A \wedge B) \Rightarrow B$ ausdrücken. Denn ist C ein beliebiger boolescher Ausdruck mit $C \Rightarrow A$ und $C \Rightarrow B$, so gilt auch $C \Rightarrow (A \wedge B)$.

$$\begin{tikzcd} A & A \wedge B \arrow[l] \arrow[r] & B \\ & C \arrow[ul] \arrow[u, dashed] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

b.), c.) Das exponential Object B^A zweier Ausdrücke A und B ist die Implikation $A \Rightarrow B$, also $\neg A \vee B$, und Die Evaluation ev ist der sogenannte „modus ponens“:
$((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$.
Vom Modus pones überzeugt man sich, indem man eine Wertetabelle aufstellt, oder indem man semantisch argumentiert: Wenn B aus A folgt, und A erfüllt ist, so gilt auch B.

d.) Wir müssen noch zeigen, dass die Universalitätseigenschaft für B^A mit ev erfüllt ist. Zu zeigen ist also, dass für jeden Booleschen Ausdruck C, der $(C \wedge A) \Rightarrow B$ erfüllt,

auch $C \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ erfüllt ist.

$$\begin{tikzcd}
A \Rightarrow B & (A \Rightarrow B) \wedge A \arrow[l] \arrow[dr] & \\
C \arrow[u, "\hat{g}"] & C \wedge A \arrow[l] \arrow[u, "\hat{g} \times id_A"'] \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

Dies gilt wegen des „deduction theorems“:

$$(C \wedge A) \Rightarrow B \quad \text{ist aussagenlogisch äquivalent zu} \quad C \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

Vom deduction theorem überzeugt man sich durch Aufstellen einer Wertetabelle. Es stellt sich heraus, dass beide Ausdrücke bei der Belegung $A = 1,\ B = 0,\ C = 1$ den Wert 0 annehmen, und bei allen anderen Belegungen den Wert 1. $\square$

Aufgabe 6 - Musterlösung

a.) Um $(B \times D)^A \simeq B^A \times D^A$ in der Kategorie Zero-order-logic zu zeigen, müssen wir zeigen:

$$A \Rightarrow (B \wedge D) \quad \text{ist äquivalent zu} \quad (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow D).$$

Dies zeigt man durch Aufstellen einer Wertetabelle, oder indem man semantisch argumentiert: Aus A folgt $B \wedge D$ genau dann, wenn aus A sowohl B als auch D folgen.

b.) Um $(B^A)^D \simeq B^{A \times D}$ in der Kategorie Zero-order-logic zu zeigen, müssen wir zeigen:

$$D \Rightarrow (A \Rightarrow B) \quad \text{ist äquivalent zu} \quad (A \wedge D) \Rightarrow B.$$

Dies gilt, denn es ist (da $\wedge$ kommutativ ist) die Aussage des deduction theroems aus Aufgabe 5.d.

c.) Um $B^A \times B^D \simeq B^{A+D}$, zu zeigen, wobei $A + D$ die Disjunktion $A \vee D$ ist, müssen wir zeigen:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (D \Rightarrow B) \quad \text{ist äquivalent zu} \quad (A \vee D) \Rightarrow B.$$

Dies zeigt man durch Aufstellen einer Wertetabelle, oder indem man semantisch argumentiert: Wenn B sowohl aus A als auch aus D folgt, folgt B aus $A \vee D$. Denn wenn $A \vee D$ wahr ist, ist mindestens eines von A und D wahr, und dann folgt B. Umgekehrt muss, wenn B aus $A \vee D$ folgt, B sowohl aus A als auch aus D folgen. $\square$

Aufgabe 7 - Musterlösung

B^A ist ein exponential Object, also gibt es einen Pfeil $ev : B^A \times A \to B$, sodass für jedes $g : C \times A \to B$, also für jedes $g \in \mathrm{Hom}(C \times A, B)$, ein $\hat{g} : C \to B^A$, also $\hat{g} \in \mathrm{Hom}(C, B^A)$, exitiert mit $g = ev \circ (\hat{g} \times id_A)$.

$$\begin{tikzcd}
B^A & B^A \times A \arrow[l, "\pi_{B^A}"'] \arrow[dr, "ev"] & \\
C \arrow[u, "\hat{g}"] & C \times A \arrow[l, "\pi_C"'] \arrow[u, "\hat{g} \times id_A"'] \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

Die Abbildung $\lambda : \mathrm{Hom}(C \times A, B) \to \mathrm{Hom}(C, B^A)$, die jedem g das entsprechende $\hat{g}$ zuordnet, ist injektiv. Denn ist $\hat{g}_1 = \hat{g}_2$, so ist
$g_1 = ev \circ (\hat{g}_1 \times id_A) = ev \circ (\hat{g}_2 \times id_A) = g_2$.

Die Abbildung λ ist auch surjektiv. Denn auf ein beliebiges $\hat{g} : C \to B^A$ wird genau das $g = ev \circ (\hat{g} \times id_A)$ abgebildet.

Somit ist λ bijektiv, also invertierbar, d.h., $\mathrm{Hom}(C \times A, B)$ und $\mathrm{Hom}(C, B^A)$ sind isomorphe Mengen. $\square$