Übungsblatt 4

Technische Hochschule Mittelhessen, Fachbereich MNI, Prof. Dr. B. Just
Kategorientheorie für Informatiker

Aufgabe 1

Hier geht es darum, Currying in **Set** zu üben :). Es wird benutzt, dass **Set** eine CCC ist.

Es sei $A = \mathbb{N},\ B = \mathbb{Q}$, also ist $B^A = \mathrm{Hom}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$ das exponential Object von A und B, mit der Evaluation $ev : \mathrm{Hom}(\mathbb{N}, \mathbb{Q}) \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$.
Für jede Menge M und jedes $g : M \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ gibt es ein $\hat{g} : M \to \mathrm{Hom}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{HOM}(\mathbb{N}, \mathbb{Q}) \times \mathbb{N} \arrow[dr, "ev"] & \\
& \mathbb{Q} \\
M \times \mathbb{N} \arrow[uu, dashed, "\hat{g} \times id_{\mathbb{N}}"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Bitte bestimmen Sie $\hat{g}$ für die folgenden Funktionen g.

a.) $M = \mathbb{Z}$ und $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q},\ g(z, n) = z \cdot n$.

b.) $M = \mathbb{Z}$ und $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q},\ g(z, n) = z^n$.

c.) $M = \{\text{Tiere}\}$ (jaja, animals :))
und $g : \{\text{Tiere}\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q},\ g(\text{Tier}, n) = n \mod (\text{Anzahl Beine von Tier})$.

d.) $M = \{\text{Tiere}\}$ und $g : \{\text{Tiere}\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q},\ g(\text{Tier}, n) = n + (\text{Anzahl Beine von Tier})$.

Aufgabe 2

FSet ist finite set, die Kategorie der endlichen Mengen, deren Objekte endliche Mengen sind, und deren Morphismen die Abbildungen zwischen ihnen sind.

a.) Gibt es in **FSet** für alle Objekte A, B ein exponential Object?

b.) Ist **FSet** eine CCC?

Aufgabe 3

Bitte erläutern Sie die folgenden Exponentiationsgesetze in **FSet**.

a.) $(B \times D)^A \simeq B^A \times D^A$

b.) $(B^A)^D \simeq B^{A \times D}$

c.) $B^A \times B^D \simeq B^{A+D}$, wobei $A + D$ die disjunkte Vereinigung von A und D ist.

Auf der Rückseite kommen noch weitere Aufgaben.

Aufgabe 4

($\mathbf{FSet}, \subseteq$) ist die Kategorie, deren Objekte die endlichen Mengen sind, und bei der ein Pfeil $A \to B$ genau dann vorhanden ist, wenn gilt $A \subseteq B$. (Wer möchte, überzeugt sich schnell, ($\mathbf{FSet}, \subseteq$) tatsächlich eine Kategorie ist). Ist ($\mathbf{FSet}, \subseteq$) eine CCC? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5

Zero-order-logic ist die Kategorie der Aussagenlogik, deren Objekte boolesche Ausdrücken in beliebigen, endlich vielen Variablen sind. Objekte sind also z.B. $x_1 \wedge x_2$, $a \Rightarrow b$, $x_1 \Leftrightarrow a$, $x_1 \vee x_2 \vee \neg y$ usw.

Ein Pfeil $F_1 \to F_2$ ist in der Kategorie genau dann vorhanden, wenn gilt $F_1 \Rightarrow F_2$.
Eine äquivalente Formulierung dafür ist es, dass für jede Belegung B der Variablen, die in F_1 oder F_2 vorkommen, gilt $F_1(B) \leq F_2(B)$. (Man überlege sich gerne die Äauivalenz der Formulierungen, und auch, dass es sich tatsächlich um eine Kategorie handelt).

Bitte zeigen Sie, dass Zero-order-logic eine CCC ist, wobei gilt:

a.) Das kategorielle Produkt zweier Ausdrücke A und B ist die Konjunktion $A \wedge B$, zusammen mit den Projektionspfeilen, die $(A \wedge B) \Rightarrow A$ und $(A \wedge B) \Rightarrow B$ ausdrücken.

b.) Das exponetial Object zweier Ausdrücke A und B ist die Implikation $A \Rightarrow B$, also $\neg A \vee B$.

c.) Die Evaluation ev ist der sogenannte „modus ponens“: $((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$.

d.) Die Universalitäsbedingung im Diagramm für die Exponentiation, die aussagt, dass für jedes C und $g : C \times A \to B$ ein $\hat{g} : C \to B^A$ exisiteren muss mit $g = ev \circ (\hat{g} \times id_A)$, ist wegen des sogenannten „deduction theorems“ erfüllt:

$$(C \wedge A) \Rightarrow B \text{ ist aussagenlogisch äquivalent zu } C \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

Aufgabe 6

Bitte erläutern Sie die folgenden Exponentiationsgesetze in Zero-order-logic.

a.) $(B \times D)^A \simeq B^A \times D^A$

b.) $(B^A)^D \simeq B^{A \times D}$

c.) $B^A \times B^D \simeq B^{A+D}$, wobei $A + D$ die Disjunktion $A \vee D$ ist.

Aufgabe 7

Bitte zeigen Sie, dass in jeder CCC für beliebige Objekte A, B, C gilt:

$$\mathrm{Hom}(C \times A, B) \simeq \mathrm{Hom}(C, B^A),$$

wobei der Isomorphismus in **Set** besteht (die Hom-Sets sind ja nicht notwendig Objekte der CCC selbst).

Viel Spaß und Erfolg!