Übungsblatt 5 - Musterlösungen

Technische Hochschule Mittelhessen, Fachbereich MNI, Prof. Dr. B. Just
Kategorientheorie für Informatiker

Aufgabe 1

Es seien C, D, E Kategorien, und $F : C \to D$ und $G : D \to E$ Funktoren. $(G \circ F) : C \to E$ sei ihre Verkettung, sowohl bezüglich der Objekte, als auch bezüglich der Pfeile.

i.) Zunächst ist zu zeigen, dass für alle Objekte A von C gilt:

$$(G \circ F)(id_A) = id_{(G \circ F)A}$$

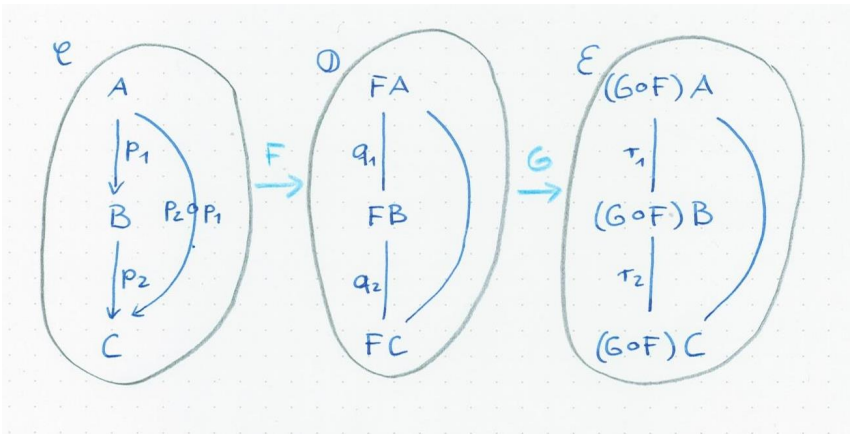
Dies gilt, denn weil F und G Funktoren sind, ist für alle Objekte A von C und U von D:

$$F(id_A) = id_{FA}, \text{und} \quad G(id_B) = id_{GB}$$

Wendet man das an auf $U = FA$, so erhält man

$$(G \circ F)(id_A) = G(F(id_A)) = G(id_{F(id_A}) = id_{G(F(id_A))} = id_{(G \circ F)(A)}$$

ii.) Seien nun $p_1 : A \to B$ und $p_2 : B \to C$ Pfeile in C. Weiter seien $q_1 : FA \to FB$ und $q_2 : FB \to FC$ ihre Bilder unter F in D, und $r_1 : (G \circ F)A \to (G \circ F)B$ und $r_2 : (G \circ F)B \to (G \circ F)C$ deren Bilder unter G in E.
Die folgende Grafik verdeutlicht die Situation, wobei die Pfeilrichtungen von q_1, q_2, r_1, r_2 noch nicht eingezeichnet sind, denn sie hängen davon ab, ob F und G covariante oder contravariante Funktoren sind.



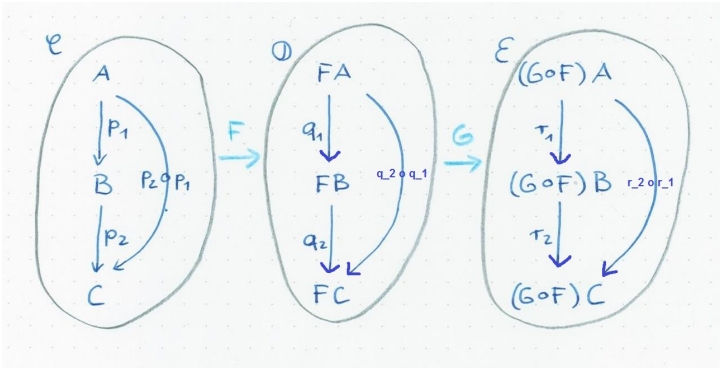
Es ist zu zeigen, dass gilt:

entweder $(G \circ F)(p_2 \circ_C p_1) = (G \circ F)(p_2) \circ_E (G \circ F)(p_1)$
(dann ist $G \circ F$ ein covarianter Funktor),

oder $(G \circ F)(p_2 \circ_C p_1) = (G \circ F)(p_1) \circ_E (G \circ F)(p_2)$
(dann ist $G \circ F$ ein contravarianter Funktor).

<u>Fall 1:</u> F und G sind beide covariant. Dann ist

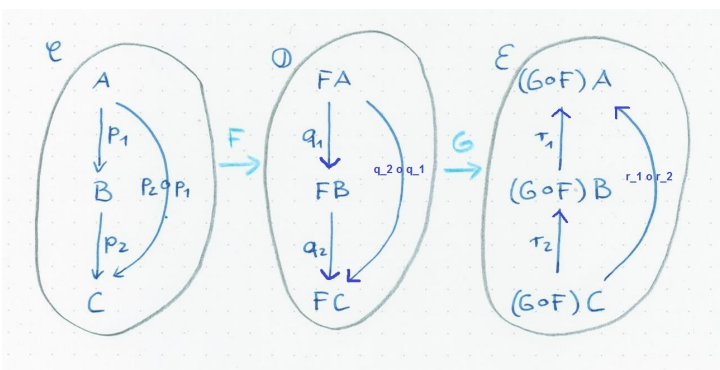
$q_1 : FA \to FB, \quad q_2 : FB \to FC,$
$r_1 : (G \circ F)A \to (G \circ F)B, \quad r_2 : (G \circ F)B \to (G \circ F)C$
und
$(G \circ F)(p_2 \circ_C p_1) = G(q_2 \circ_D q_1) = r_2 \circ r_1 = (G \circ F)(p_2) \circ_E (G \circ F)(p_1)$



$G \circ F$ ist also ein covarianter Funktor.

<u>Fall 2:</u> F ist covariant, und G ist contravariant. Dann ist

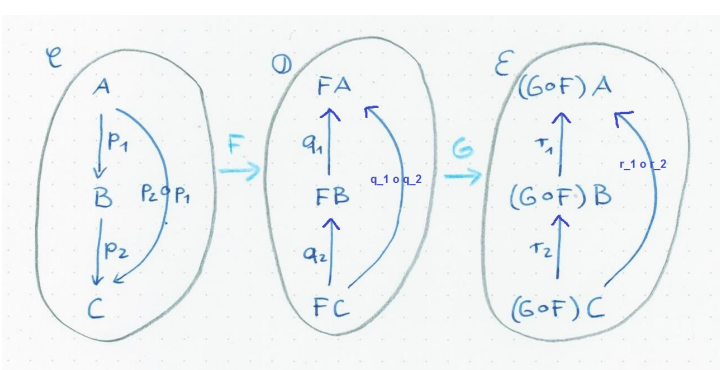
$$q_1 : FA \to FB, \quad q_2 : FB \to FC,$$
$$r_1 : (G \circ F)B \to (G \circ F)A, \quad r_2 : (G \circ F)C \to (G \circ F)B$$
und
$$(G \circ F)(p_2 \circ_C p_1) = G(q_2 \circ_D q_1) = r_1 \circ r_2 = (G \circ F)(p_1) \circ_E (G \circ F)(p_2)$$



$G \circ F$ ist also ein contravarianter Funktor.

<u>Fall 3:</u> F ist contravariant, und G ist covariant. Dann ist

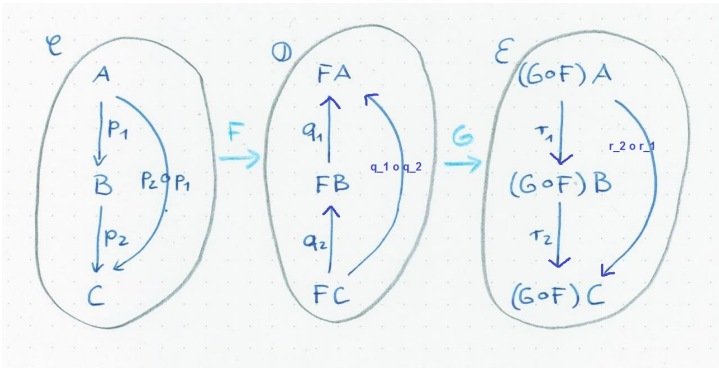
$$q_1 : FB \to FA, \quad q_2 : FC \to FB,$$
$$r_1 : (G \circ F)B \to (G \circ F)A, \quad r_2 : (G \circ F)C \to (G \circ F)B$$
und
$$(G \circ F)(p_2 \circ_C p_1) = G(q_1 \circ_D q_2) = r_1 \circ r_2 = (G \circ F)(p_1) \circ_E (G \circ F)(p_2)$$



$G \circ F$ ist also ein contravarianter Funktor.

<u>Fall 4:</u> F und G sind beide contravariant. Dann ist

$$q_1 : FB \to FA, \quad q_2 : FC \to FB,$$
$$r_1 : (G \circ F)A \to (G \circ F)B, \quad r_2 : (G \circ F)B \to (G \circ F)C$$
und
$$(G \circ F)(p_2 \circ_C p_1) = G(q_1 \circ_D q_2) = r_2 \circ r_1 = (G \circ F)(p_2) \circ_E (G \circ F)(p_1)$$



$G \circ F$ ist also ein covarianter Funktor. $\square$

Aufgabe 2

Zu zeigen ist jeweils für jedes Objekt X und arrow f:

i.) $F(id_X) = id_{F(X)}$;

ii.) Für alle verknüpfbaren Arrows f, g gilt: $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$
(wobei einmal die Verknüpfung in der Urbildkategorie und einmal die Verknüpfung in der Bildkategorie gemeint ist - und conravariante Funktoren kommen in der Aufgabe nicht vor).

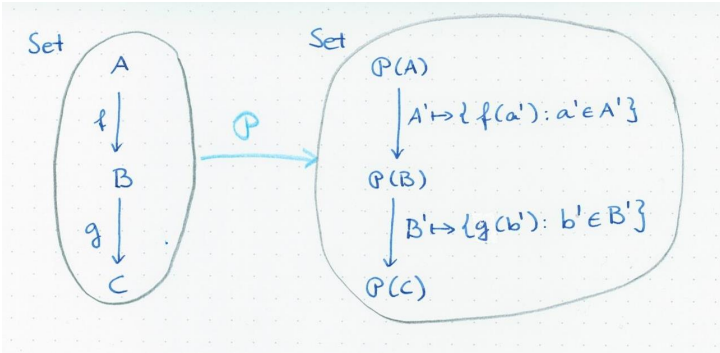
a.) Betrachtet wird $Id : C \to C$.
Objekte und Pfeile werden jeweils auf sich selbst abgebildet.

Die Eigenschaften i.), und ii.) sind offensichtlich.

b.) Betrachtet wird der forgetful functor $U : \mathbf{Mon} \to \mathbf{Set}$.
Jedes Monoid $(M, \circ)$ wird in die Menge M abgebildet.
Jeder Monoidhomomorphismus $f : (M_1, \circ_1) \to (M_2, \circ_2)$ wird in die Abbidlung $Uf : M_1 \to M_2$ abgebildet, die jedem $m \in M_1$ sein Bild $f(m) \in M_2$ zuordnet.

i.) gilt, weil sowohl in **Mon** als auch in **Set** die Identitäten die identische Abbildung auf der jeweiligen Menge sind.
ii.) gilt, weil die Hintereinanderausführung von Abbildungen in **Mon** und **Set** gleich sind.

c.) Betrachtet wird der Powerset-Funktor $\mathcal{P} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$.
Objekte: Jede Menge M wird in ihre Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ abgebildet.
Pfeile: $f : A \to B$ wird der Funktion $\mathcal{P}f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ zugeordnet, die ihrerseits eine Teilmenge $A' \subseteq A$ in die Menge $\{f(a') : a' \in A'\} \subseteq B$ abbildet.



i.) Ist $f = id : A \to A$ die Identität, so ist $\mathcal{P}f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ die Abbildung, die jede Teilmenge $A' \subseteq A$ in die Menge $\{id(a') : a' \in A'\} \subseteq A$ abbildet. Dies ist die Menge A', also ist $\mathcal{P}(id_A) = id_{\mathcal{P}(A)}$.

ii.) Seien A, B, C Mengen (also Objekte in **Set**), und $f : A \to B$, $g : B \to C$ Abbildungen zwischen ihnen. Dann ist

$\mathcal{P}(g \circ f)$ die Abbildung, die jeder Teilmenge A' von A die Teilmenge $\{(g \circ f)(a') : a' \in A'\}$ zuordnet;

$\mathcal{P}(g) \circ \mathcal{P}(f)$ die Abbildung, die jeder Teilmenge A' von A zunächst die Teilmenge $B' = \{f(a') : a' \in A'\}$, und dieser dann die Teilmenge $C' = \{g(b') : b' \in B'\}$ zuordnet.
Es ist $C' = \{g(f(a')) : a' \in A'\} = \{(g \circ f)(a') : a' \in A'\}$.

Also gilt $\mathcal{P}(g \circ f) = \mathcal{P}(g) \circ \mathcal{P}(f)$.

d.) Sei B die Kategorie, deren Objekte boolesche Funktionen in den Variablen $x_1, ..., x_n$ sind. Ein Pfeil $f_1 \to f_2$ existiere genau dann, wenn $f_1 \Rightarrow f_2$ gilt, wenn also für jede Belegung $x \in \{0,1\}^n$ gilt: $f_1(x) \leq f_2(x)$.
Betrachtet wird die Zuordnung $F : B \to \mathbf{Set}$. Einer booleschen Funktion f in $(x_1, ..., x_n)$ die Menge
$Z_f = \{x \in \{0,1\}^n : f(x) = 1\}$ werden ihre erfüllenden Belegungen zugeordnet, die sogenannten „Zeugen“.
Jedem Pfeil $f_1 \to f_2$ in B ordnet F außerdem die Inklusion $i : Z_{f_1} \to Z_{f_2}$ zu, die ihrerseits jedes Element sich selbst zuordnet.

F ist ein Funktor. Denn dem Identitätspfeil einer booleschen Funktion wird die Identität auf der Menge ihrer Zeugen zugeordnet.
Der Verkettung zweier Pfeile $f_1 \to f_2 \to f_3$ wird die Verkettung der Inklusionen ihrer Zeugen zugeordnet. Dies ist die Inklusion der Menge der Zeugen von f_1 in die Menge der Zeugen von f_3.

e.) Ist C eine Kategorie mit Produkten und A ein Objekt von C, so ordnet der Side-Functor $S_A : C \to C$ jedem Objekt B von C das Produkt $B \times A$ zu. Er ordnet jedem Pfeil den Pfeil $(f \times id_A)$ zu.
Diese Konstruktion wird angewendet auf C=Teiler und $A = 4$.

i.) Wie wirkt S_4 auf die Objekte und Pfeile von Teiler?

Objekte: Jedem Objekt A wird $\mathrm{ggT}(A, 4)$ zugeordnet. Die Bildobjekte sind also $1, 2$ und 4 in Teiler.

Pfeile: Dem Pfeil $\frac{B}{A}$ wird der folgende Pfeil zugeordnet:

$$\frac{\mathrm{ggT}(B,4)}{\mathrm{ggT}(A,4)}$$

ii.) Bitte weisen Sie nach, dass S_4 ein Endofunktor von Teiler ist.

S_4 ist ein Funktor. Denn jedem Pfeil $\frac{A}{A}$ wird der Pfeil $\frac{\mathrm{ggT}(A,4)}{\mathrm{ggT}(A,4)}$, also der Identitätspfeil auf $S_4(A)$ zugeordnet.

Es gilt außerdem $S_4(\frac{C}{B} \circ \frac{B}{A}) = S_4(\frac{A}{C}$. Davon kann man sich (z.B.) überzeugen, indem man die 7 Möglichkeiten der ggTs mit 4 einzeln prüft:

ggT$(A,4)$	ggT$(B,4)$	ggT$(C,4)$
1	1	1
1	1	2
1	1	4
1	2	2
1	2	4
1	4	4
2	2	2
2	2	4
2	4	4
4	4	4

S_4 ist ein Endofunktor, denn S_4 geht von Teiler nach Teiler, d.h., von einer Kategorie in sich selbst. $\square$

Aufgabe 3

Der Listenfunktor *list* : **Set** $\to$ **Mon** ordnet jeder Menge X die das Monoid $(\mathit{list}(X), *, [\,])$ der Listen mit Elementen aus X mit der Verkettung $*$ und der leeren Liste als neutralem Element zu. Jeder Funktion $f : A \to B$ ordnet er die Funktion *maplist(f)*: $\mathit{list}(A) \to \mathit{list}(B)$ zu. Diese bildet eine Liste $[a_1, ..., a_n]$ ab in die Liste $[f(a_1), ..., f(a_n)]$.

a.) *list* ist ein Funktor. Denn zum Einen ist *maplist(f)* auf der Identität einer Menge die Identität auf den Listen mit Objekten dieser Menge.
Zum anderen ist für Funktionen $f : A \to B, g : B \to C$ und eine beliebige Liste $[a_1, ..., a_n]$ mit Elementen von A:

$$\begin{aligned} &\mathit{maplist}(g \circ f)\,[a_1, ..., a_n] = [(g \circ f)(a_1), ..., (g \circ f)(a_n)] \\ &= \mathit{maplist}(g)\,[f(a_1), ..., f(a_n)] = (\mathit{maplist}(g) \circ \mathit{maplist}(f))\,[a_1, ..., a_n] \end{aligned}$$

b.) Wir zeigen, dass die folgenden bekannten definierenden Gleichungen von *maplist*

i.) *maplist(f)*$([\,]) = [\,]$

ii.) *maplist(f)*$([s] * L') = [f(s)] * \mathit{maplist}(f)(L')$

äquivalent zu den folgenden kategoriellen Gleichungen sind:

I.) *maplist(f)*$([\,]) = [\,]$

II.) *maplist(f)*$(L * L') = [f(L)] * \mathit{maplist}(f)(L')$

III.) *maplist(f)*$([s]) = [f(s)]$

Denn aus I.), II.) und III.) folgen i.) und ii.):
Denn i.) folgt sofort, und ii.) sieht man, indem man in b.) $L = [s]$ setzt.

Umgekehrt folgen I.), II.) und III.) aus i.) und ii.) wie folgt:

I.) folgt sofort aus i.).

III.) folgt aus ii.), indem man $L' = [\,]$ setzt.

II.) erhält man dann aus ii.) durch vollständige Induktion nach der Länge von L, wobei c.) die Induktionsverankerung ist. $\square$

Aufgabe 4

Betrachtet werden Kategorien C und D mit Produkten $\times_C$ bzw. $\times_D$, und ein Funktor $F : C \to D$ zwischen ihnen. Seien A und B feste Objekte von C, und X ein beliebiges Objekt von C. Dann kommutiert das Diagramm auf der linken Seite der folgenden Zeichnung, und folglich auch sein Bild unter F auf der rechten Seite:

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\langle f,g\rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & B
\end{tikzcd}
\quad \xrightarrow{F} \quad
\begin{tikzcd}
 & FX \arrow[dl, "Ff"'] \arrow[d, "F(\langle f,g\rangle)"] \arrow[dr, "Fg"] & \\
FA & F(A \times B) \arrow[l, "F\pi_A"] \arrow[r, "F\pi_B"'] & FB
\end{tikzcd}$$

Das bedeutet jedoch NICHT notwendig

$$F(A \times_C B) = F(A) \times_D F(B)$$

Denn das Bild von C kann zu klein in D sein. Im Folgenden Beispiel gilt die Gleichung nicht:

C sei die Kategorie mit nur einem Objekt A und seinem Identitätspfeil. D sei die Kategorie **Set**, und F bilde A in eine nichtleere Menge M ab.

Dann ist $F(A \times A) = F(A) = M \neq M \times M = F(A) \times F(A)$. $\square$

Aufgabe 5

a.) Es sei $U : \mathbf{Mon} \to \mathbf{Set}$ der forgetful functor, und $42 : \mathbf{Mon} \to \mathbf{Set}$ der konstante Funktor, der jedes Monoid der Menge $\{42\}$ zuordnet.
Der Funktor $U + 42 : \mathbf{Mon} \to \mathbf{Set}$ wirkt wie folgt auf die Monoide und Monoidhomomorphismen:

Ein Monoid $(M, \circ)$ wird abgebildet in die Menge $\{42\} \sqcup M = \{(1, 42)\} \cup \{(2, m) : m \in M\}$.

Ein Monoidhomomorphismus $f : (M_1, \circ_1) \to (M_2, \circ_2)$ wird abgebildet in

$(42 + U)f : (\{42\} \sqcup M_1) \to (\{42\} \sqcup M_2)$ mit

$(1, 42) \mapsto (1, 42)$ und $(2, m_1) \mapsto (2, f(m_1))$ für alle $m_1 \in M_1$.

b.) Die Funktoren $F, G, 17 :$ Teiler $\to$ Teiler seien wie folgt definiert:

F:	Objekte: $x \mapsto 20x$	Pfeile: $\frac{B}{A} \mapsto \frac{20B}{20A}$
G:	Objekte: $x \mapsto 30x$	Pfeile: $\frac{B}{A} \mapsto \frac{30B}{30A}$
17:	Objekte: $x \mapsto 17$	Pfeile: $\frac{B}{A} \mapsto \frac{17}{17}$

Der Funktor $17 + F \times G :$ Teiler $\to$ Teiler wirkt wie folgt auf Objekte und Pfeile:

Da das Produkt in Teiler der ggT und die Summe das kgV ist, wird jedes Objekt x in Teiler (also $x \in \mathbb{N}$) abgebildet nach kgV(17, ggT($20x, 30x$)).

Für die Pfeile erhält man, wobei $+$ und $\times$ die kategorielle Summe und Produkt sind:

$$\begin{aligned}
\frac{B}{A} \quad \to \quad \frac{17}{17} + \left(\frac{20B}{20A} \times \frac{30B}{30A}\right) &= \frac{17}{17} + \frac{\mathrm{ggT}(20B, 30B)}{\mathrm{ggT}(20A, 30B)} \\
&= \frac{17}{17} + \frac{10B}{10A} = \frac{\mathrm{kgV}(17, 10B)}{\mathrm{kgV}(17, 10A)} = \frac{10 \cdot \mathrm{kgV}(17, B)}{10 \cdot \mathrm{kgV}(17, A)} \qquad \square
\end{aligned}$$