Übungsblatt 5

Technische Hochschule Mittelhessen, Fachbereich MNI, Prof. Dr. B. Just
Kategorientheorie für Informatiker

Aufgabe 1

Bitte zeigen Sie, dass die Hintereinanderausführung von Funktoren wieder ein Funktor ist, für die vier Varianten von covarianten und contravarianten Funktoren.

Aufgabe 2

Bitte zeigen Sie, dass es sich bei den folgenden Konstruktionen um Funktoren handelt. Dabei sei C jeweils eine beliebige Kategorie.

a.) $Id : C \to C$.
Objekte und Pfeile werden jeweils auf sich selbst abgebildet.

b.) Der forgetful functor $U : \mathbf{Mon} \to \mathbf{Set}$.
Jedes Monoid $(M, \circ)$ wird in die Menge M abgebildet.
Jeder Monoidhomomorphismus $f : (M_1, \circ_1) \to (M_2, \circ_2)$ wird in die Abbidlung $Uf : M_1 \to M_2$ abgebildet, die jedem $m \in M_1$ sein Bild $f(m) \in M_2$ zurordnet.

c.) Der Powerset-Funktor $\mathcal{P} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$.
Objekte: Jede Menge M wird in ihre Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ abgebildet.
Pfeile: $f : A \to B$ wird der Funktion $\mathcal{P}f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ zugeordnet, die ihrerseits eine Teilmenge $A' \subseteq A$ in die Menge $\{f(a') : a' \in A'\} \subseteq B$ abbildet.

d.) Sei B die Kategorie, deren Objekte boolesche Funktionen in den Variablen $x_1, ..., x_n$ sind. Ein Pfeil $f_1 \to f_2$ existiere genau dann, wenn $f_1 \Rightarrow f_2$ gilt, wenn also für jede Belegung $x \in \{0,1\}^n$ gilt: $f_1(x) \leq f_2(x)$.
$F : B \to \mathbf{Set}$ ordnet einer booleschen Funktion f in $(x_1, ..., x_n)$ die Menge $Z_f = \{x \in \{0,1\}^n : f(x) = 1\}$ ihrer erfüllenden Belegungen zu, also ihrer „Zeugen“.
Jedem Pfeil $f_1 \to f_2$ in B ordnet F die Inklusion $i : Z_{f_1} \to Z_{f_2}$ zu, die ihrerseits jedes Element sich selbst zuordnet.

e.) Ist C eine Kategorie mit Produkten und A ein Objekt von C, so ordnet der Side-Functor $S_A : C \to C$ jedem Objekt B von C das Produkt $B \times A$ zu. Er ordnet jedem Pfeil den Pfeil $(f \times id_A)$ zu.
Diese Konstruktion wird angewendet auf C=Teiler und $A = 4$.

i.) Wie wirkt S_4 auf die Objekte und Pfeile von Teiler?

ii.) Bitte weisen Sie nach, dass S_4 ein Endofunktor von Teiler ist.

Auf der Rückseite kommen noch weitere Aufgaben.

Aufgabe 3

Der Listenfunktor *list* : **Set** $\to$ **Mon** ordnet jeder Menge X die das Monoid $(\mathit{list}(X), *, [\,])$ der Listen mit Elementen aus X mit der Verkettung $*$ und der leeren Liste als neutralem Element zu. Jeder Funktion $f : A \to B$ ordnet er die Funktion *maplist(f)*: $\mathit{list}(A) \to \mathit{list}(B)$ zu. Diese bildet eine Liste $[a_1, ..., a_n]$ ab in die Liste $[f(a_1), ..., f(a_n)]$.

a.) Bitte zeigen Sie, dass *list* ein Funktor ist.

b.) Bitte zeigen Sie, dass die folgenden bekannten definierenden Gleichungen von *maplist*

i.) $\mathit{maplist(f)}([\,]) = [\,]$

ii.) $\mathit{maplist(f)}([s] * L') = [f(s)] * \mathit{maplist(f)}(L')$

äquivalent zu den folgenden kategoriellen Gleichungen sind:

a.) $\mathit{maplist(f)}([\,]) = [\,]$

b.) $\mathit{maplist(f)}(L * L') = [f(L)] * \mathit{maplist(f)}(L')$

c.) $\mathit{maplist(f)}([s]) = [f(s)]$

Aufgabe 4

Es seien C und D Kategorien mit Produkten $\times_C$ bzw. $\times_D$, und $F : C \to D$ ein Funktor zwischen ihnen. Gilt für alle Objekte A und B von C die folgende Gleichung?

$$F(A \times_C B) = F(A) \times_D F(B)$$

Aufgabe 5

a.) Es sei U : **Mon** $\to$ **Set** der forgetful functor, und 42 : **Mon** $\to$ **Set** der konstante Funktor, der jedes Monoid der Menge $\{42\}$ zuordnet.
Wie wirkt der Funktor $U + 42$: **Mon** $\to$ **Set** auf die Monoide und Monoidhomomorphismen?

b.) Die Funktoren $F, G, 17$: Teiler $\to$ Teiler seien wie folgt definiert:

F:	Objekte: $x \mapsto 20x$	Pfeile: $\frac{B}{A} \mapsto \frac{20B}{20A}$
G:	Objekte: $x \mapsto 30x$	Pfeile: $\frac{B}{A} \mapsto \frac{30B}{30A}$
17:	Objekte: $x \mapsto 17$	Pfeile: $\frac{B}{A} \mapsto \frac{17}{17}$

Wie wirkt der Funktor $17 + F \times G$: Teiler $\to$ Teiler auf Objekte und Pfeile?

Viel Spaß und Erfolg!