Übungsblatt 6 - Musterlösungen

Technische Hochschule Mittelhessen, Fachbereich MNI, Prof. Dr. B. Just
Kategorientheorie für Informatiker

Aufgabe 1

Zunächst wird ganz allgemein beschrieben, wie man beweist, dass etwas eine natürliche Transformation ist.

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren.

Da F und G Funktoren sind, dürfen wir voraussetzen, dass F und G die Objekte von $\mathcal{C}$ in die Objekte von $\mathcal{D}$ abbilden, und die Pfeile von $\mathcal{C}$ in die Pfeile von $\mathcal{D}$, sodass für alle Objekte A von $\mathcal{C}$ und alle Pfeile $f : A \to B, g : B \to D$ in $\mathcal{C}$ gilt:

$$F(id_A) = id_{FA} \quad \text{und} \quad F(g \circ f) = F(g) \circ F(f);$$

$$G(id_A) = id_{GA} \quad \text{und} \quad G(g \circ f) = G(g) \circ G(f).$$

Die natürliche Transformation $\eta : F \dot{\to} G$ muss nun für jedes $\mathcal{C}$-Objekt A einen $\mathcal{D}$-Pfeil η_A enthalten, sodass für alle $\mathcal{C}$-Pfeile $f : A \to B$ gilt:

$$\eta_B \circ F(f) = G(f) \circ \eta_A.$$

Das folgende Diagramm muss also für alle $\mathcal{C}$-Pfeile $f : A \to B$ kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_A"'] & FB \arrow[d, "\eta_B"'] \\
GA \arrow[r, "G(f)"'] & GB
\end{tikzcd}$$

i.) Für jedes TEILER-Objekt n sei η_n der Pfeil $\frac{n^3}{n^2}$.

Dann ist für jeden Pfeil $f = \frac{b}{a}$ von Teiler:

$$\text{hoch3}(f) \circ \eta_a \quad = \quad \frac{b^3}{a^3} \circ \frac{a^3}{a^2} \quad = \quad \frac{b^3}{a^2} \quad = \quad \frac{b^3}{b^2} \circ \frac{b^2}{a^2} \quad = \quad \eta_b \circ \text{hoch2}(f)$$

Das kommutierende Diagramm sieht wie folgt aus:

$$\begin{tikzcd}
a^2 \arrow[r, "\frac{b^2}{a^2}"] \arrow[d, "\frac{a^3}{a^2}"'] & b^2 \arrow[d, "\frac{b^3}{b^2}"'] \\
a^3 \arrow[r, "\frac{b^3}{a^3}"'] & b^3
\end{tikzcd}$$

Bemerkung: Man hätte auch andere η_n definieren können, z.B. $\eta_n = \frac{17 \cdot n^3}{n^2}$

ii.) Für jede Menge X sei $\mu : \text{list} \circ \text{list} \dot{\to} \text{list}$ die Transformation, die bei einer Liste von Listen die zweitäußersten Klammern weglässt. Es ist also z.B. μ, angewendet auf die Liste von Listen $[\ [a,b,c]\,,[r,s]\,,[x,[y,z]\,,w]\ ]$, die Liste $[a,b,c,r,s,x,[y,z]\,,w]$.

Das folgende Diagramm kommutiert offenbar in Set:

$$\begin{tikzcd}
\text{list(list(A))} \arrow[r, "\text{maplist(maplist(f))}"] \arrow[d, "\text{Zweitäußerste Klammern weglassen}"'] & \text{list(list(B))} \arrow[d, "\text{Zweitäußerste Klammern weglassen}"'] \\
\text{list(A)} \arrow[r, "\text{maplist(f)}"'] & \text{list(B)}
\end{tikzcd}$$

□

Aufgabe 2

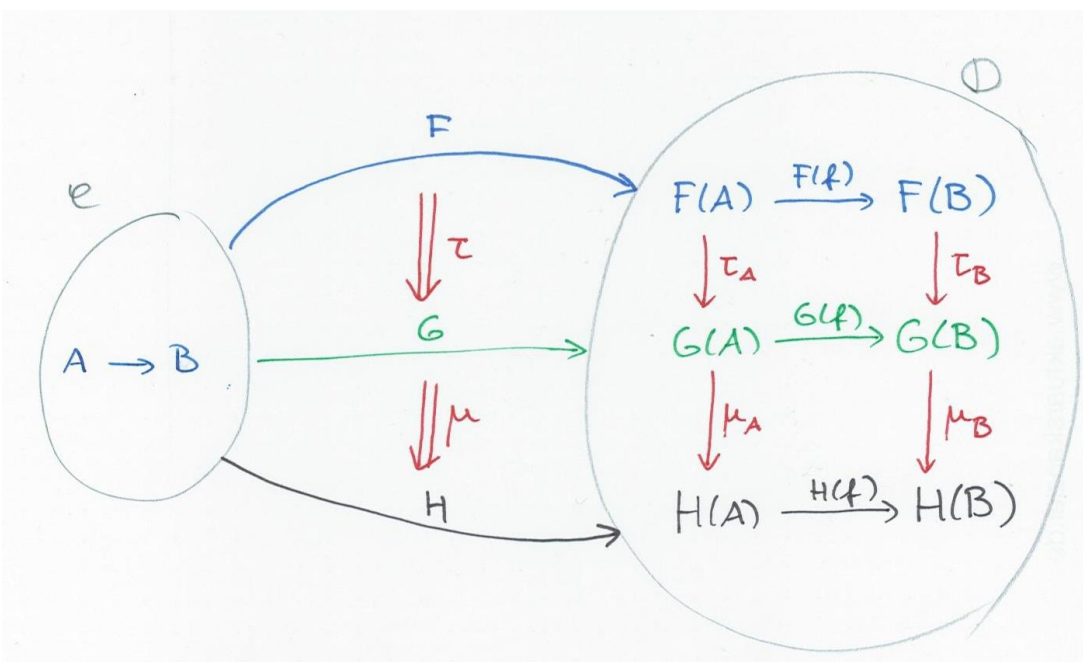
a.) Seien $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren, und $\tau : F \dot{\to} G$ und $\mu : G \dot{\to} H$ natürliche Transformationen.

Sei $\mu \circ \tau$ die Familie, die für jedes $\mathcal{C}$-Objekt A den Pfeil $\mu_a \circ \tau_A$ enthält.

$\mu \circ \tau : F \dot{\to} H$ ist eine natürliche Transformation.

Denn es ist für jeden $\mathcal{C}$-Pfeil $f : A \to B$, weil μ und τ natürliche Transformationen sind:

$$\begin{aligned} H(f) \circ (\mu \circ \tau)_A &= \mu_b \circ G(f) \circ \tau_A \\ &= \mu_B \circ \tau_B \circ F(f) = (\mu \circ \tau)_B \circ F(f). \end{aligned}$$



b.) Seien $F_1, F_2 : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G_1, G_2 : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ Funktoren, und seien $\tau : F_1 \dot{\to} F_2$ und $\mu : G_1 \dot{\to} G_2$ natürliche Transformationen.

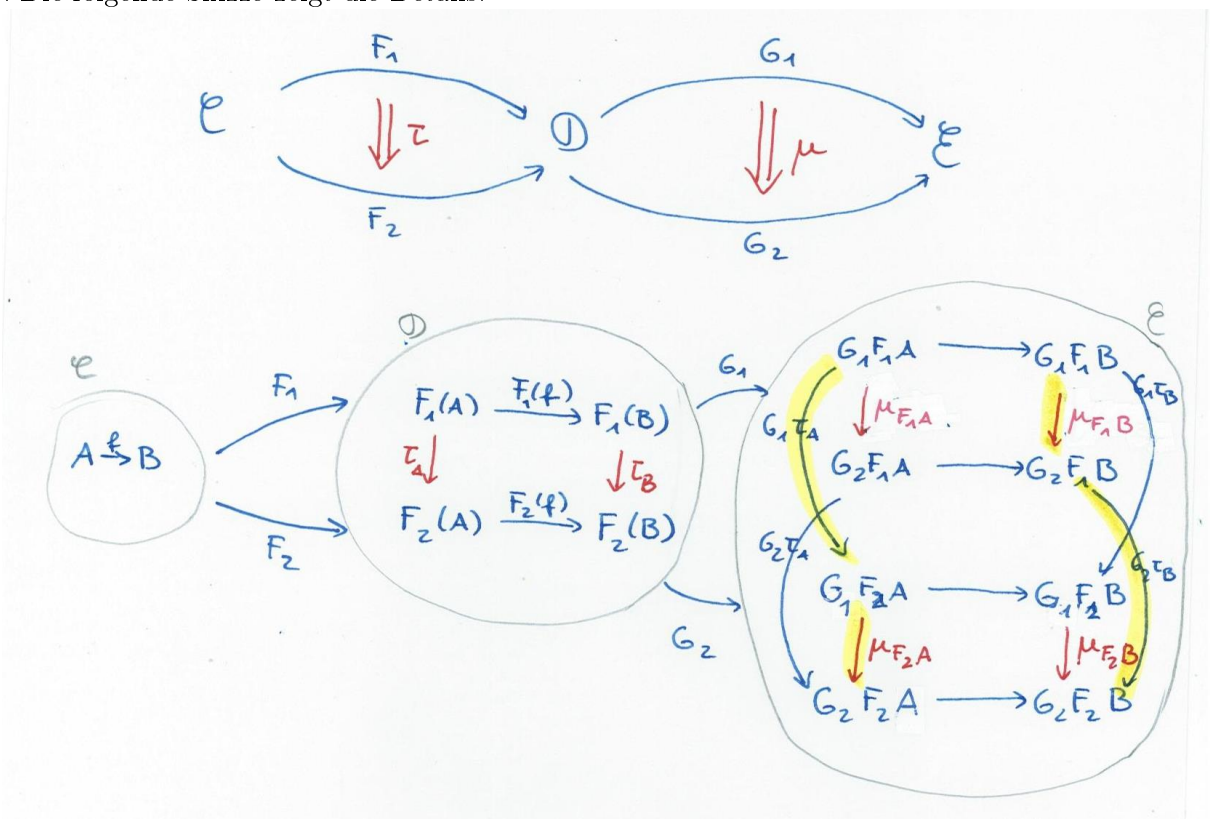
Ordnet man jedem $\mathcal{C}$-Objekt X den $\mathcal{E}$-Pfeil

$$\mu \circ \tau = \mu_{F_2(X)} \circ G_1(\tau_X)$$

(oder, identisch, $\mu \circ \tau = G_2(\tau_X) \circ \mu_{F_1(X)}$) zu, so definiert dies eine natürliche Transformation

$$\mu \circ \tau : G_1 \circ F_1 \ \dot{\to} G_2 \circ F_2$$

. Die folgende Skizze zeigt die Details.



□

Aufgabe 3

Hier gibt es keine Musterlösung :)

Aufgabe 4

Sei zunächst $\tau : S \dot{\to} T$ eine natürliche Transformation. Zu zeigen ist, dass für alle Objekte A von $\mathcal{C}$ gilt: $S(A) \leq T(A)$.

Dies gilt, denn wenn τ eine natürliche Transformation ist, gibt es für jedes Objekt A von $\mathcal{C}$ einen Pfeil $\tau_A : S(A) \to T(A)$ in $\mathcal{P}$ mit gewissen Zusatzeigenschaften. Allein die Existenz des Pfeiles in $\mathcal{P}$ zeigt bereits $S(A) \leq T(A)$.

Es gelte nun umgekehrt für alle Objekte A von $\mathcal{C}$ die Beziehung $S(A) \leq T(A)$. Zu zeigen ist, dass es dann eine natürliche Transformation $\tau : S \dot{\to} T$ gibt.

Wir definieren dazu für jedes Objekt A von $\mathcal{C}$ den Pfeil $\tau_A : S(A) \to T(A)$ in $\mathcal{P}$ als den Pfeil, der $S(A) \leq T(A)$ ausdrückt.

Ist nun $f : A \to B$ ein beliebiger Pfeil in $\mathcal{C}$. Da S und T covariant sind, ist $S(f)$ ein Pfeil von $S(A)$ nach $S(B))$ und $T(f)$ ein Pfeil von $T(A)$ nach $T(B))$, also ist $S(A) \leq S(B))$ und $T(A) \leq T(B)$.

Somit ist $T(F) \circ \tau_A = \tau_B \circ S(F)$:
Beides ist der (in $\mathcal{P}$ eindeutige) Pfeil von $S(A)$ nach $T(B)$.

$$\begin{tikzcd}
S(A) \arrow[r, "S(f)"] \arrow[d, "\tau_A"'] \arrow[dr, "\text{eindeutig}"] & S(B) \arrow[d, "\tau_B"'] \\
T(A) \arrow[r, "T(f)"'] & T(B)
\end{tikzcd}$$

$\square$