Übungsblatt 7 - Musterlösungen

Technische Hochschule Mittelhessen, Fachbereich MNI, Prof. Dr. B. Just
Kategorientheorie für Informatiker

Aufgabe 1

Hier gibt es keine Musterlösung - schauen Sie im Zweifelsfall noch einmal im Skript oder Ihrer Mitschrift nach :).

Aufgabe 2

- Es sei $x \in \mathbf{R}$. Wir definieren $\eta_x = \lceil x \rceil - x$. Dann ist η_x der Pfeil der Kategorie AR von x nach $\lceil x \rceil$.
  Die Familie aller η_x ist eine natürliche Transformation $\eta : Id \dot{\to} \lceil . \rceil$. Denn es gilt für alle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$:

  $$(\lceil y \rceil - \lceil x \rceil) + (\lceil x \rceil - x) = \lceil y \rceil - x = (\lceil y \rceil - y) + (y - x),$$

  also kommutiert das folgende Diagramm:

  $$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "y-x"] \arrow[d, "\lceil x \rceil - x"'] & y \arrow[d, "\lceil y \rceil - y"] \\ \lceil x \rceil \arrow[r, "\lceil y \rceil - \lceil x \rceil"] & \lceil y \rceil \end{tikzcd}$$

  .

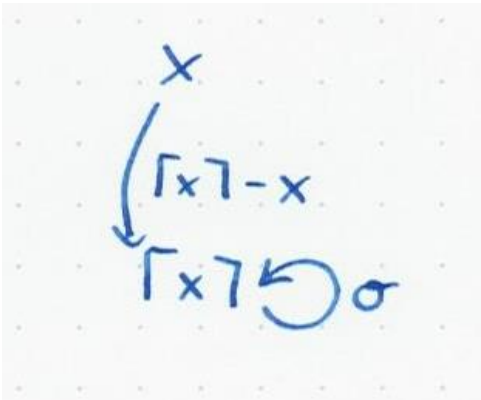
  Für ganze Zahlen ist η die Identität. Somit ist insbesondere für die gerundeten Zahlen $\lceil x \rceil$ erfüllt:

  $$\eta_{\lceil x \rceil} = id_{\lceil x \rceil} \text{ und } \lceil x \rceil(\eta_{\lceil x \rceil}) = id_{\lceil x \rceil}.$$

- Für jedes $x \in \mathbb{R}$ sei μ_x der mit 0 beschriftete Pfeil von $\lceil x \rceil$ nach $\lceil x \rceil$, also die Identität auf $\lceil x \rceil$. Da ganze Zahlen durch Aufrunden nicht mehr verändert werden, ist $\mu : \lceil . \rceil \dot{\to} \lceil . \rceil$ eine natürliche Transformation. Das folgende Diagramm kommutiert:

  $$\begin{tikzcd} \lceil x \rceil \arrow[r, "\lceil y \rceil - \lceil x \rceil"] & \lceil y \rceil & \leftarrow \text{einmal gerundet} \\ \lceil x \rceil \arrow[u, bend left, "\mu = 0"] \arrow[r, "\lceil y \rceil - \lceil x \rceil"] & \lceil y \rceil \arrow[u, "\mu = 0"'] & \leftarrow \text{zweimal gerundet} \end{tikzcd}$$

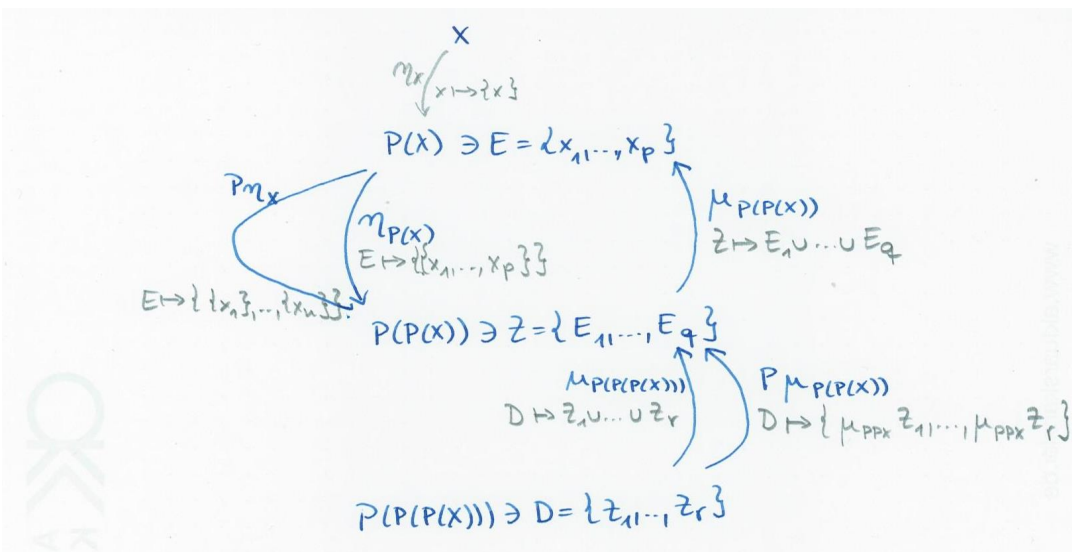
- Die Monadengesetze gelten nun, weil alle an ihnen beteiligten Pfeile die Identität auf $\lceil x \rceil$ sind:



Eine detaillierte Lösung dieser Aufgabe steht in einem separaten Dokument bereit. □

Aufgabe 3

a.)



b. Es ist

$$\mu_{P(P(X))} \circ \eta_{P(X)}(E) = \mu_{P(P(X))}(\{\ \{x_1, ..., x_p\}\ \}) = \{x_1, ..., x_p\} = E.$$

c.) Es ist

$$\mu_{P(P(X))} \circ P\eta_X(E) = \mu_{P(P(X))}(\{\ \{x_1\}, \{x_2\}, ..., \{x_p\}\ \}) = \{x_1, ..., x_p\} = E.$$

d.) Für die Menge
$D = \{\ \{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_1\}\}\ ,\ \{\{x_1, x_3, x_4\}, \{x_6, x_7\}, \{x_1, x_2\}\}\ ,\ \{\{x_6, x_7\}, \{x_3\}\}\ \}$ ist

$$\begin{aligned}
&\mu_{P(P(X))} \circ \mu_{P(P(P(X)))}(D) \\
&\quad = \mu_{P(P(X))}(\ \{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_1\}\} \cup \{\{x_1, x_3, x_4\}, \{x_6, x_7\}, \{x_1, x_2\}\} \cup \{\{x_6, x_7\}, \{x_3\}\} \\
&\quad = \mu_{P(P(X))}(\ \{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_1\}, \{x_1, x_3, x_4\}, \{x_6, x_7\}, \{x_3\}\} \\
&\quad = \{x_1, x_2\} \cup \{x_3, x_4\} \cup \{x_1\} \cup \{x_1, x_3, x_4\} \cup \{x_6, x_7\} \cup \{x_3\} \\
&\quad = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_7\}.
\end{aligned}$$

Es ist

$$
\begin{aligned}
&= \mu_{P(P(X))} \circ P\mu_{P(P(X))}(D) \\
&\quad = \mu_{P(P(X))}(\{\ \{x_1, x_2\} \cup \{x_3, x_4\} \cup \{x_1\}\ ,\ \{x_1, x_3, x_4\} \cup \{x_6, x_7\} \cup \{x_1, x_2\}\ , \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \{x_6, x_7\} \cup \{x_3\}\ \}) \\
&\quad = \mu_{P(P(X))}(\{\ \{x_1, x_2, x_3, x_4\}\ ,\ \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_7\}\ ,\ \{x_3, x_6, x_7\}\ \}) \\
&\quad = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_7\}.
\end{aligned}
$$

Beides ist also gleich. $\square$