Übungsblatt 7

Technische Hochschule Mittelhessen, Fachbereich MNI, Prof. Dr. B. Just
Kategorientheorie für Informatiker

Aufgabe 1

Die Monadengesetze der Kategorientheorie werden in Wikipedia unter Monade (Kategorientheorie) wie folgt erklärt:

- $\mu \circ T\mu = \mu \circ \mu T$, d. h. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} T^3 \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T \end{tikzcd}$$

- $\mu \circ \eta T = \mu \circ T\eta = 1$, d. h. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\eta T"] \arrow[d, "T\eta"'] \arrow[dr, equal] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T \end{tikzcd}$$

.

Bitte erläutern Sie die Gesetze, und schauen Sie dabei so wenig wie möglich in Ihre Unterlagen :).

Aufgabe 2

In dieser Aufgabe wird sich herausstellen, dass das Aufrunden von reellen Zahlen eine Monade ist (genauso auch das Abrunden und das kaufmännische Runden, die werden hier allerdings nicht betrachtet).

Betrachtet wird die Kategorie AR, deren Objekte die reellen Zahlen sind, und für die von jeder Zahl x zu jeder Zahl y der Pfeil $y - x : x \to y$ führt. $y - x$ wird dabei als reelle Zahl geschrieben, es gibt also von einem Objekt zu einem anderen stets genau einen Pfeil. (Wer möchte, überlegt sich, dass es sich um eine Kategorie handelt, mit der Komposition $(z - y) \circ (y - x) := (z - y) + (y - x) = z - x$).

Der Aufrunden-Funktor $\lceil . \rceil : AR \to AR$ ordnet jeder reellen Zahl x die nächstgrößere (oder gleichgroße, wenn x bereits ganzzahlig ist) Zahl $\lceil x \rceil$ zu, und jedem Pfeil $y - x$ den Pfeil $\lceil y \rceil - \lceil x \rceil$. (Wer möchte, überlegt sich, dass es sich um einen Funktor handelt.)

Bitte überlegen Sie, mit welchen Transformationen η und μ der Aufrunden-Funktor zu einer Monade wird, und begründen Sie die Monadengesetze.

... auf der Rückseite geht es weiter :)

Aufgabe 3

Betrachtet wird der Powerset-Funktor $P : \mathbf{FSet} \to \mathbf{FSet}$. Er ordnet bekanntlich einer endlichen Menge X ihre Potenzmenge $P(X)$ zu, und er ordnet dem Pfeil (also der Funktion) $f : X \to Y$ den Pfeil (also die Funktion) $Pf : P(X) \to P(Y)$ zu, wobei Pf der Teilmenge $E \subseteq X$ die Teilmenge $f(E) \subseteq Y$ zuordnet. Diese besteht aus den Bildern der Elemente von E.

$\eta : \mathrm{Id} \dot{\to} P$ enthält für jede endliche Menge X die Abbildung $\eta_X : X \to P(X)$, welche jedem $x \in X$ die Menge $\{x\} \in P(X)$ zuordnet.

$\mu : P^2 \dot{\to} P$ enthält für jede endliche Menge X die Abbildung $\mu_X : P(P(X)) \to P(X)$, welche jeder Menge $Z = \{E_1, ..., E_q\} \in P(P(X))$ die Vereinigungsmenge ihrer Elemente (die ja Mengen sind) zuordnet:

$$\mu_X(Z) = E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_q \in P(X)$$

Bitte überzeugen Sie sich, dass (P, η, μ) ist eine Monade in **FSet** ist. Dazu:

a.) Bitte fertigen Sie eine Zeichnung an, die zunächst die Mengen $X, P(X), P(P(X))$ und $P(P(P(X)))$ enthält, sowie Elemente $E = \{x_1, ..., x_p\} \in P(X), Z = \{E_1, ..., E_q\} \in P(P(X))$ und $D = \{Z_1, ..., Z_r\} in P(P(P(X)))$.
Fügen Sie der Zeichnung dann Pfeile $\eta_{P(X)}, P\eta_X, \mu_{P(P(X))}, \mu_{P(P(P(X)))}$ und $P\mu_{P(P(X))}$) zu, an denen auch steht, wohin die jeweiligen Inputs E, Z und D abgebildet werden.

b.) Zeigen Sie $\mu_{P(P(X))} \circ \eta_{P(X)}(E) = E$
(damit ist eines der Monadengesetze bewiesen).

c.) Zeigen Sie $\mu_{P(P(X))} \circ P\eta_X(E) = E$
(damit ist das nächste Monadengesetz bewiesen).

d.) Überzeugen Sie sich von

$$\mu_{P(P(X))} \circ \mu_{P(P(P(X)))} = \mu_{P(P(X))} \circ P\mu_{P(P(X))}$$

am Beispiel der Menge
$D = \{ \ \{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_1\}\} \ , \ \{\{x_1, x_3, x_4\}, \{x_6, x_7\}, \{x_1, x_2\}\} \ , \ \{\{x_6, x_7\}, \{x_3\}\} \ \}$
(damit ist das dritte Monadengesetz am Beispiel verifiziert).

Viel Spaß und Erfolg!