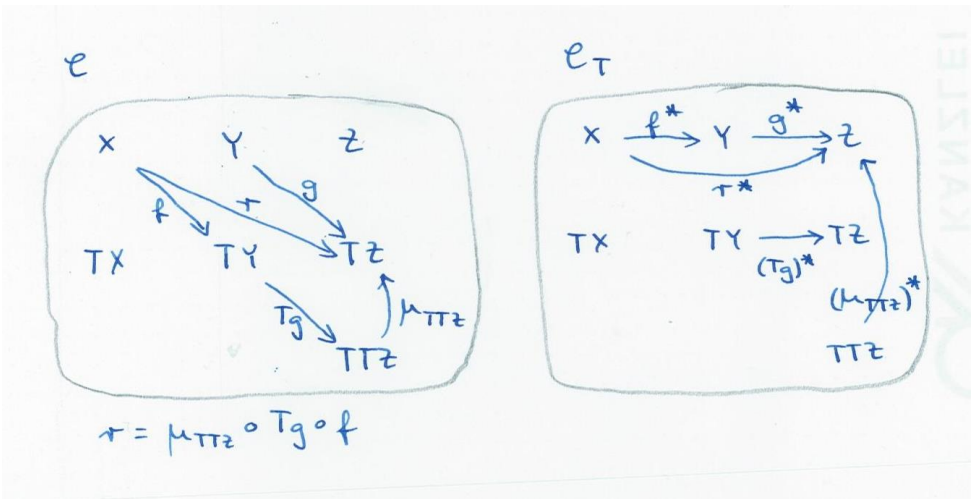
Übungsblatt 8 - Musterlösungen

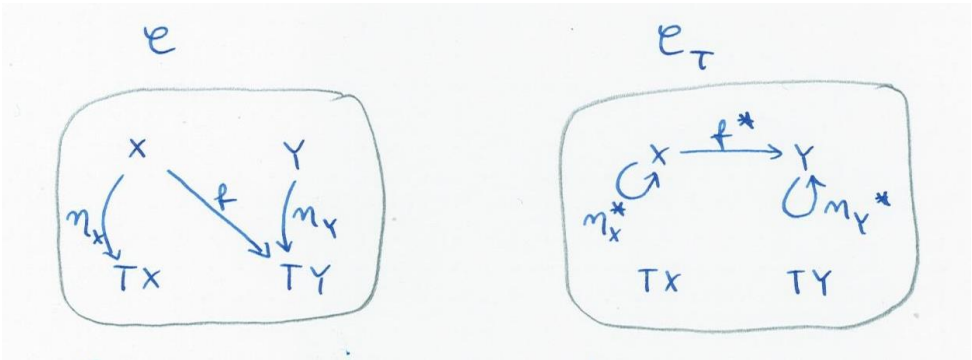
Technische Hochschule Mittelhessen, Fachbereich MNI, Prof. Dr. B. Just
Kategorientheorie für Informatiker

Aufgabe 1

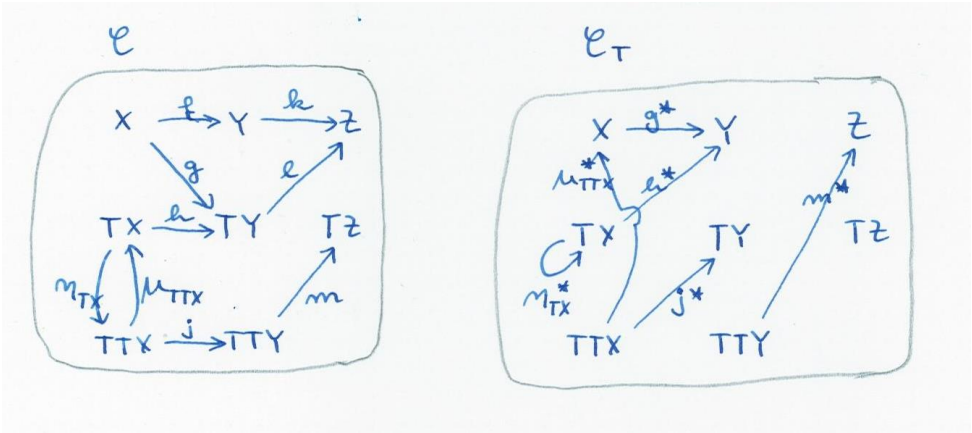
a.)



b.)

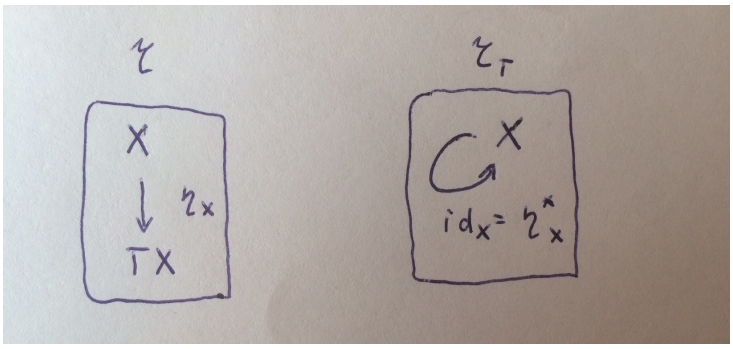


c.)



Aufgabe 2

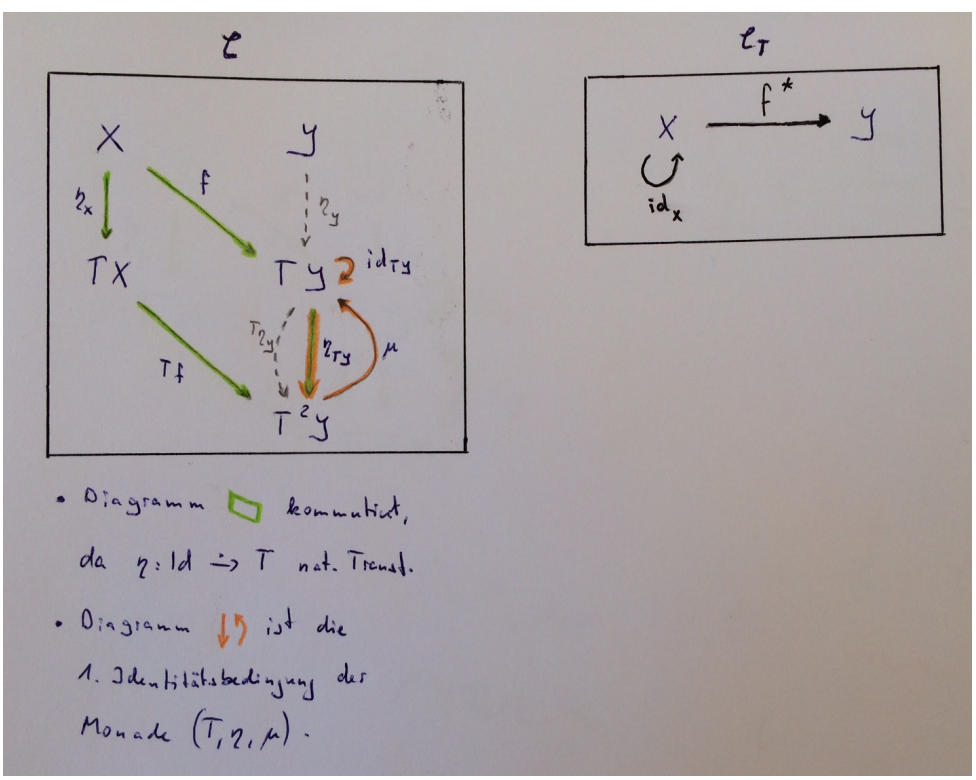
- **Identitätsbedingungen für Kleisli Kategorie**
  Für jedes $X \in C_T$ ist $id_X = \eta_X^*$ (Kleisli Identitätspfeile).



Es muss gezeigt werden, dass für jedes $f^* : X \to Y$ gilt: $f^* \circ_T id_X = f^* = id_Y \circ_T f^*$.

Linke Bedingung:

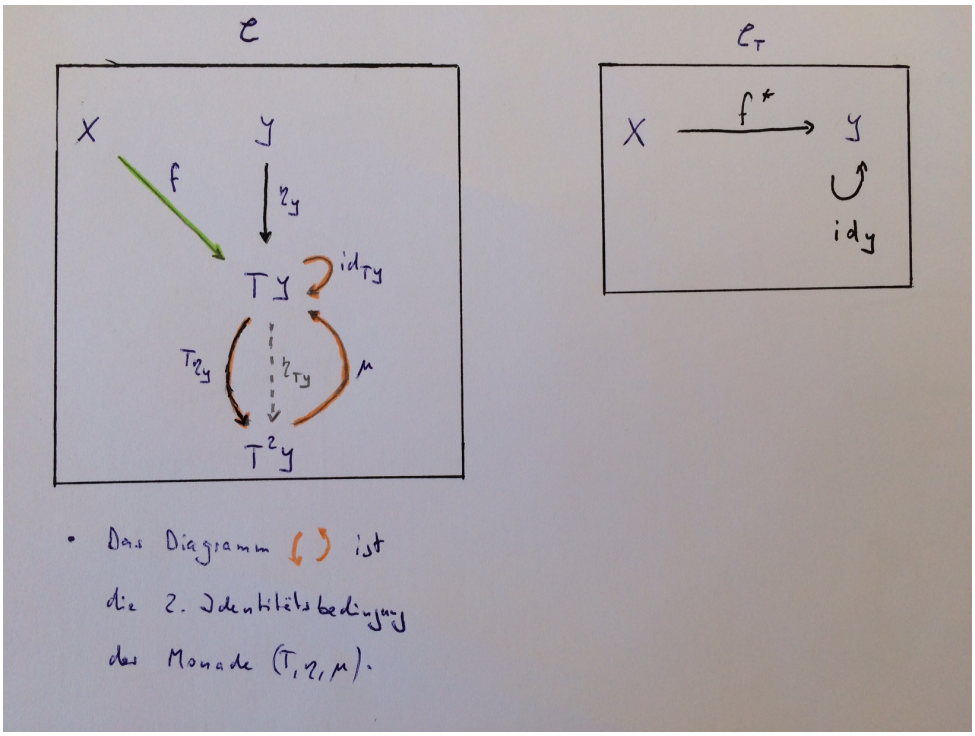
$$
\begin{aligned}
f^* \circ_T id_X &= f^* \circ_T \eta_X^* && \text{(Kleisli-Identitätspfeil)} \\
&= \big(\mu \circ Tf \circ \eta_X\big)^* && \text{(Kleisli-Komposition)} \\
&= \big(\mu \circ (Tf \circ \eta_X)\big)^* \\
&= \big(\mu \circ (\eta_{TY} \circ f)\big)^* && \text{(natürliche Transformation } \eta\text{)} \\
&= \big((\mu \circ \eta_{TY}) \circ f\big)^* \\
&= \big(id_{TY} \circ f\big)^* && \text{(Monadenbedingung)} \\
&= f^*
\end{aligned}
$$



Rechte Bedingung:

$$
\begin{aligned}
id_Y \circ_T f^* &= \eta_Y^* \circ_T f^* && \text{(Kleisli-Identitätspfeil)}\\
&= \big(\mu \circ T\eta_Y \circ f\big)^* && \text{(Kleisli-Komposition)}\\
&= \big((\mu \circ T\eta_Y) \circ f\big)^* \\
&= \big(id_{TY} \circ f\big)^* && \text{(Monadenbedingung)}\\
&= f^*
\end{aligned}
$$

□

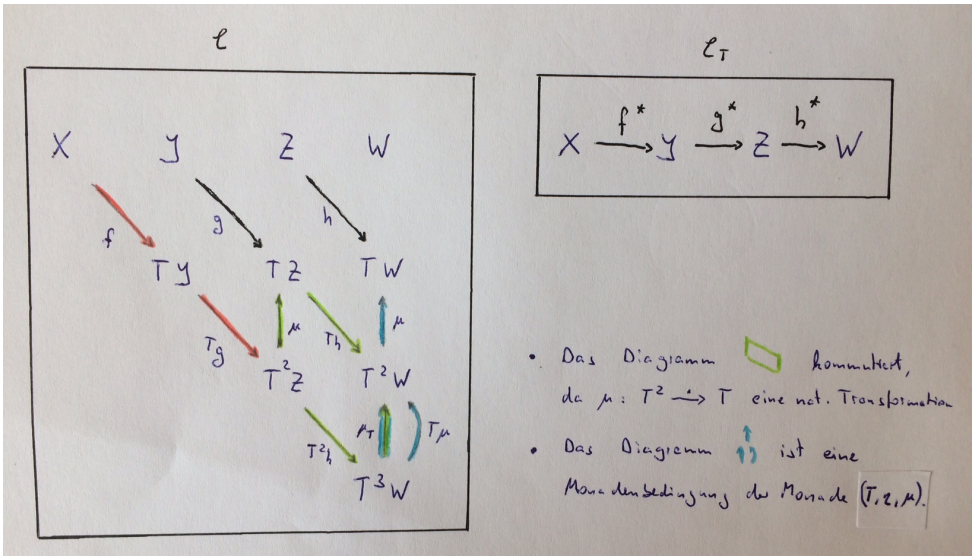


- **Assoziativität für Kleisli Komposition**
  Es muss gezeigt werden: $h^* \circ_T (g^* \circ_T f^*) = (h^* \circ_T g^*) \circ_T f^*$

  Es ist:

$$
\begin{aligned}
h^* \circ_T (g^* \circ_T f^*) &= h^* \circ_T (\mu \circ Tg \circ f)^* && \text{(Kleisli-Komposition)}\\
&= \big(\mu \circ Th \circ (\mu \circ Tg \circ f)\big)^* && \text{(Kleisli-Komposition)}\\
&= \big(\mu \circ (Th \circ \mu) \circ Tg \circ f\big)^* \\
&= \big(\mu \circ (\mu_T \circ TTh) \circ Tg \circ f\big)^* && \text{(natürliche Transformation } \mu\text{)}\\
&= \big((\mu \circ \mu_T) \circ TTh \circ Tg \circ f\big)^* \\
&= \big((\mu \circ T\mu) \circ TTh \circ Tg \circ f\big)^* && \text{(Monadenbedingung)}\\
&= \big(\mu \circ (T\mu \circ TTh \circ Tg) \circ f\big)^* \\
&= \big(\mu \circ T(\mu \circ Th \circ g) \circ f\big)^* && \text{(Funktoreigenschaft } T\text{)}\\
&= (\mu \circ Th \circ g)^* \circ_T f^* && \text{(Kleisli-Komposition)}\\
&= (h^* \circ_T g^*) \circ_T f^* && \text{(Kleisli-Komposition)}
\end{aligned}
$$

$\square$



Das Diagramm kommutiert für alle Pfeilpfade von X nach TW.

Aufgabe 3

Hier gibt es keine Musterlösung :)