Übungsblatt 9 - Musterlösungen

Technische Hochschule Mittelhessen, Fachbereich MNI, Prof. Dr. B. Just
Kategorientheorie für Informatiker

Aufgabe 1

Hier gibt es keine Musterlösung :)

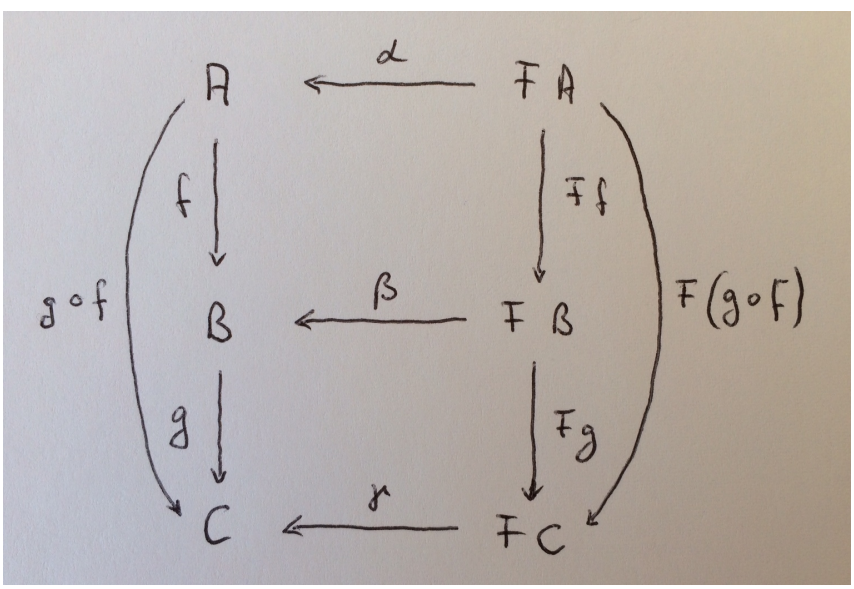
Aufgabe 2

a.) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ein (Endo)-Funktor. Es wird gezeigt, dass **F-Alg** eine Kategorie ist:

- **Pfeil-Komposition der F-Algebren**
  Seien $\alpha : F(A) \to A$, $\beta : F(B) \to B$ und $\gamma : F(C) \to C$ F-Algebren in $\mathcal{C}$ und seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ F-Algebra-Morphismen von α nach β und von β nach γ.
  Dann existieren die Pfeile $g \circ f$ und $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$ und es gilt:

$$\begin{aligned}
(g \circ f) \circ \alpha &= g \circ (f \circ \alpha) && \text{(Assoziativität in } \mathcal{C}\text{)} \\
&= g \circ (\beta \circ Ff) && \text{(F-Algebra-Morphismus)} \\
&= (g \circ \beta) \circ Ff && \text{(Assoziativität in } \mathcal{C}\text{)} \\
&= (\gamma \circ Fg) \circ Ff && \text{(F-Algebra-Morphismus)} \\
&= \gamma \circ (Fg \circ Ff) && \text{(Assoziativität in } \mathcal{C}\text{)} \\
&= \gamma \circ F(g \circ f) && \text{(Funktoreigenschaft)}
\end{aligned}$$

  Also ist $g \circ f$ ein F-Algebra Morphismus von α nach γ.



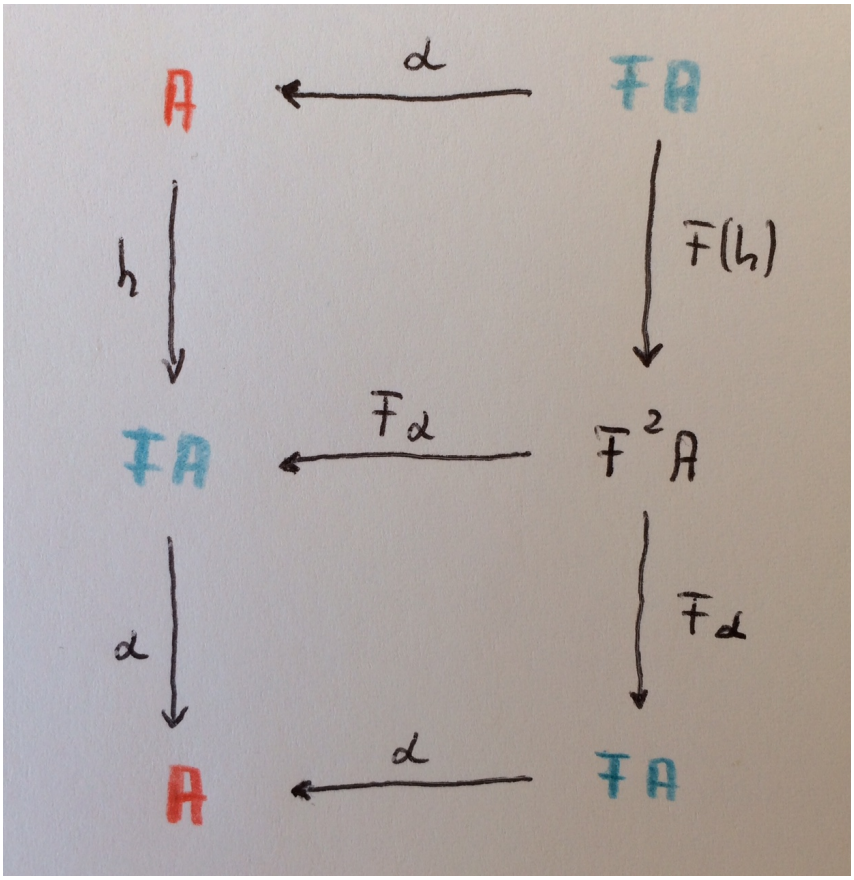
- **Identitätsbedingung**
  Für Algebren $\alpha : F(A) \to A$ und $\beta : F(B) \to B$ sind die jeweiligen Identitäten gegeben durch die F-Algebra-Morphismen $id_\alpha = id_A$ und $id_\beta = id_B$. Für den F-Algebra-Morphismus $f : A \to B$ gilt:

$$id_\beta \circ f = id_B \circ f = f = f \circ id_A = f \circ id_\alpha$$

- **Assoziativität der Komposition**
  Seien $\alpha : F(A) \to A$, $\beta : F(B) \to B$, $\gamma : F(C) \to C$ und $\delta : F(D) \to D$ F-Algebren in $\mathcal{C}$ und seien $f : A \to B$, $g : B \to C$ und $h : C \to D$ F-Algebra-Morphismen von α nach β, von β nach γ und von γ nach δ.
  Die Assoziativiät der Komposition in $\mathcal{C}$, also $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ überträgt sich unmittelbar auf **F-Alg**.

$\square$

b.) Sei $\alpha : F(A) \to A$ ein initiales Objekt von **F-Alg**. Also existiert genau ein F-Algebra-Morphismus h von α nach $F\alpha$. Dann muss das obere Diagramm kommutieren, wobei der Monoid-Homomorphismus $h : A \to F(A)$ definionsgemäß dem F-Algebra-Morphismus h von α nach $F\alpha$ entspricht.



Das untere Diagramm kommutiert trivialerweise, da die beiden Pfadwege identisch sind. Somit kommutiert das äußere Rechteck und $\alpha \circ h$ ist ein F-Algebra-Morphismus von α nach α. Da wegen der Intialität von α genau ein Pfeil von α nach α existiert, muss $\alpha \circ h = id_A$ sein.

Aus dem oberen Diagramm folgt

$$\begin{aligned} h \circ \alpha &= F(\alpha) \circ F(h) && \text{(F-Algebra-Morphismus } h\text{)} \\ &= F(\alpha \circ h) && \text{(Funktor } F\text{)} \\ &= F(id_A) && \text{(wurde vorher gezeigt)} \\ &= id_{FA} && \text{(Funktor } F\text{)}, \end{aligned}$$

womit gezeigt ist, dass α ein Isomorphismus in $\mathcal{C}$ ist und damit $FA \simeq A$ (d.h. FA und A sind isomorph in $\mathcal{C}$).

$\square$

Aufgabe 3

a.) Seien $t_i \in TM, i = 1, 2, \ldots$ M-Terme. Zeigen, dass TM ein Monoid ist.

- **Abgeschlossenheit** Da $t_i \circ t_j$ wieder ein M-Term ist, gilt $t_i \circ t_j \in TM$.
- **Neutrales Element** Es ist $t \circ e = t = e \circ t$ für alle $t \in TM$, also erfüllt e die Neutralitätsbedingung in TM.
- **Assoziativität** Es ist $t_i \circ (t_j \circ t_k) = (t_i \circ t_j) \circ t_k = t_i \circ t_j \circ t_k$ für jedes i, j, k, das heißt, alle M-Terme lassen sich klammerfrei notieren.

  Damit sind alle Bedingungen für ein Monoid erfüllt.

$\square$

b.) Es muss gezeigt werden, dass jede Auswertungsfunktion α auf TM, ein Monoid-Homomorphismus $\alpha : TM \to M$ ist. Das ist der Fall, denn es gilt:

$$\alpha(t_i \circ t_j) = \alpha(t_i) \circ \alpha(t_j) \quad \text{(strukturerhaltende Abbildung)}$$

und

$$\alpha(e) = e$$

$\square$

c.) Sei M^* das freie Monoid, bestehend aus allen Termen, die aus den Symbolen, die aus den Symbolen $e, x_1, x_2, \ldots$ und der zweistelligen Verknüpfung $\circ$ gebildet werden können. Es muss gezeigt werden, dass $TM^* \simeq M^*$. TM^* ist die Menge aller Terme, die aus den Symbolen $e, t_1, t_2, \ldots$ und der zweistelligen Verknüpfung $\circ$ gebildet werden können, also Terme dieser Art: $(x_1 \circ x_2 \circ \ldots) \circ e \circ (x_3 \circ x_3 \circ \ldots) \circ \ldots$
Wegen der Assozitivität der Verknüpfung $\circ$ können alle Klammern beseitigt werden und wegen der Neutralität von e, kann e stets gestrichen werden, wenn es zusammen mit anderen Variablen eine Komposition bildet. Die resultierenden Terme sind allesamt schon in M^* enthalten. Daher ist sogar $TM^* = M^*$ und es existiert ein Isomorphismus zwischen M^* und $TM^* = M^*$, nämlich die identische Abbildung $id_{M^*} : M^* \to M^*$.

$\square$