Übungsblatt 9

Technische Hochschule Mittelhessen, Fachbereich MNI, Prof. Dr. B. Just
Kategorientheorie für Informatiker

Aufgabe 1

Definition: Sei C eine Kategorie, und $F : C \to C$ ein Funktor, so heißt jeder C-Pfeil $\alpha : FA \to A$ eine F-Algebra.

Beispiele: Ist F der *List*-Funktor, sind sämtliche Faltungen wie max, sum (Summe), Mittelwert *List*-Algebren. Auch die Konkatenation von *List[String]* nach *String* ist eine *List*-Algebra.

Definition: Seien $\alpha : FA \to A$ und $\beta : FB \to B$ beide F-Algebren, und sei $h : A \to B$ ein Pfeil der zugrundeliegenden Kategorie. h heißt F-Algebra-Morphismus von α nach β, wenn gilt: $h \circ \alpha = \beta \circ Fh$, wenn also das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "h"'] & FA \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "Fh"] \\ B & FB \arrow[l, "\beta"] \end{tikzcd}$$

Beispiel:

$$\begin{tikzcd} \text{String} \arrow[d, "\text{length}"] & \text{List(String)} \arrow[l, "\text{concat}"'] \arrow[d, "\text{maplist(length)}"'] \\ \text{Int} & \text{List(Int)} \arrow[l, "\text{sum}"] \end{tikzcd}$$

Bitte finden Sie eigene Beispiele für F-Algebren und für F-Algebra-Morphismen.

Aufgabe 2

Sei C eine Kategorie, und $F : C \to C$ ein Funktor. **F-Alg** ist die Kategorie, deren Objekte die F-Algebren sind, und deren Pfeile die F-Algebra-Morphismen sind, wobei die Komposition aus C vererbt wird.

a.) Bitte zeigen Sie, dass **F-Alg** tatsächlich eine Kategorie ist.

b.) Bitte zeigen Sie, dass initiale Objekte von **F-Alg** Isomorphismen in C sind.

Bemerkung: D.h., es ist $FA \simeq A$, darum heißt A auch Fixpunkt von A.

Hinweis: Wer möchte, findet einen Hinweis zum Beweis in Wikipedia unter F-Algebra.

Auf der Rückseite kommt noch eine Aufgabe :)

Aufgabe 3

Für die Informatik sind Auswertungen auf Termen besonders wichtige F-Algebren. Das wird hier am Beispiel der Monoide illustriert:

Sei in der Kategorie **Mon** der Monoide (mit den Monoiden als Objekten und den Monoid-Homomorphismen als Pfeilen) der Funktor T der Terme wie folgt definiert:

Dem Monoid $(M, \circ, e)$ mit der Menge M, der Verknüpfung $\circ$ und neutralem Element e wird die Menge TM der M-Terme zugeordnet. Ihre Elemente sind alle Terme, die aus e, der Verknüpfung $\circ$ und (nicht notwendig verschiedenen) Variablen $x_1, x_2, ...$ gebildet werden können. So ist z.B. $x_1 + x_2 + 0 + x_2 \in T(\mathbf{N}, +, 0)$ und $x_1 \circ x_2 \circ \mathrm{nil} \circ x_2 \in T(\mathit{List}(\mathit{char}), \circ, \mathrm{nil})$.

Dem Monoid-Morphismus $f : (M_1, \circ_1, e_1) \to (M_2, \circ_2, e_2)$ wird der Term-Morphismus Tf zugeordnet. Dieser ordnet jedem Term in TM_1 den Term in TM_2 zu, den man erhält, indem man jedes Vorkommen von e_1 durch e_2 ersetzt, und jedes Vorkommen von $\circ_1$ durch $\circ_2$ ersetzt.

a.) Bitte zeigen Sie, dass für jedes Monoid $(M, \circ, e)$ das Bild TM ebenfalls ein Monoid ist.

b.) Bitte zeigen Sie, dass jede Auswertungsfunktion auf den Termen eine T-Algebra definiert. Eine Auswertungsfunktion auf TM belegt jede Variable $x_1, x_2, ...$ mit Elementen $m_1, m_2 ... \in M$ und berechnet den Wert des so erhaltenen Terms in M.

c.) Bitte zeigen Sie, dass das freie Monoid ein Fixpunkt von T ist. Das freie Monoid besteht aus allen Termen, die aus den Symbolen $e, x_1, x_2, ...$ und der zweistelligen Verknüpfung $\circ$ gebildet werden können, wobei die Assoziativität und die Neutralität von e gilt und zum Vereinfachen der Terme benutzt werden kann. Die Verknüpfung zweier Terme t_1 und t_2 ist definiert als $t_1 \circ t_2$.

Viel Spaß und Erfolg!